ENERGÍA ELECTROSTÁTICA

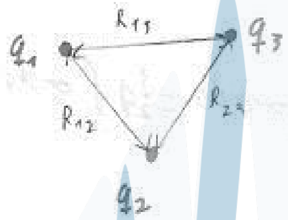
- Estudiaremos la energía que hay que ceder a un sistema para construirlo.
- Sea un sistema de cargas puntuales que traemos desde el infinito. Consideramos el caso de 3 cargas.

  - Para colocar la primera, como las demás no ejercen fuerza $\Rightarrow W_1 = 0$
  - Para colocar la segunda $\Rightarrow W_2 = \int_{\infty}^{R_{12}} -q_2\, \vec{E}_{12}\cdot d\vec{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{R_{12}}$

    Hay que ejercer una fuerza contraria a la que ejerce q_1

    $\vec{E}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r^2}\hat{u}_r$

  - Por el ppo de superposición, los campos se suman y $\Rightarrow W_3 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1 q_3}{R_{13}} + \frac{q_2 q_3}{R_{23}}\right)$



El trabajo total es: $W = W_1 + W_2 + W_3 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1 q_2}{R_{12}} + \frac{q_1 q_3}{R_{13}} + \frac{q_2 q_3}{R_{23}}\right)$

$$W = \frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j=1\\ \boxed{i\neq j}}}^{3} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i q_j}{R_{ij}}$$

Pq estoy contando dos veces

En general, la energía potencial del sistema de n cargas será:

$$\boxed{U = \frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i q_j}{R_{ij}}}$$

Ahora, esta expresión es incómoda de generalizar. Observamos que el potencial que crea q_j es $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_j}{r}$. Así, el potencial creado por todas las cargas en donde está q_i es:

$$\phi_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\frac{q_j}{R_{ij}} \Rightarrow \text{Esto nos aparecía en } U!!!$$

$$\boxed{V=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}q_i\phi_i}$$

$\rightarrow$ Potencial que el resto de cargas crean donde está q_i

Nótese que V puede ser positiva o negativa, dependiendo si hay que realizar un trabajo o no para realizar el sistema.

$\downarrow$

si $W_{ext}>0$ o <0

• En distribuciones de carga, se pasa a una integral ($q\rightarrow dq=\rho dV$):

$$\boxed{V=\int_V\frac{1}{2}\rho\,\phi\,dV}$$

Si la distribución es superficial:

$$\boxed{V=\int_S\frac{1}{2}\sigma\,\phi\,ds}$$

• Ahora, si trabajamos en un conductor, ϕ es cte.!! $\Rightarrow \int_S\frac{1}{2}\sigma\phi\,ds=\frac{1}{2}\phi\int_S\sigma\,ds=\frac{1}{2}Q\phi$

$\downarrow$

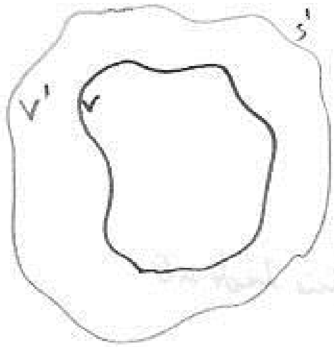
Toda la carga superficial

$$\boxed{V=\frac{1}{2}Q\phi}$$

Si hay más conductores: $\frac{1}{2}\int\sigma\phi\,ds=\frac{1}{2}\int_{1^{\circ}\,cond.}\sigma_1\phi_1\,ds+\frac{1}{2}\int_{2^{\circ}\,cond.}\sigma_2\phi_2\,ds$

$$\boxed{V=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}Q_i\phi_i}$$

· Analizamos más a fondo $\int_V \frac{1}{2}\rho\phi\, dV$:



- La integral se extiende a donde hay carga
- Ahora, como fuera de V $\rho=0$, podemos extender la integral a otro volumen que englobe toda la carga:

$$V=\int_V \frac{1}{2}\rho\phi\, dV = \int_{V'}\frac{1}{2}\rho\phi\, dV \underset{\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}}{=} \int_{V'}\frac{1}{2}\varepsilon_0\phi\,\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\, dV$$

- Ahora, $\vec{\nabla}(\phi\vec{E})=\phi\,\vec{\nabla}\cdot\vec{E}+\vec{E}\cdot\vec{\nabla}\phi \quad \forall \vec{E},\phi$. Por tanto:

$$U=\int_{V'}\frac{1}{2}\varepsilon_0\Big[\vec{\nabla}(\phi\vec{E})-\vec{E}\underbrace{\vec{\nabla}\phi}_{-\vec{E}}\Big]dV=$$

$$=\int_{V'}\frac{1}{2}\varepsilon_0\vec{\nabla}(\phi\vec{E})\,dV+\int_{V'}\frac{1}{2}\varepsilon_0E^2\,dV \overset{\text{Aplicamos el teo. de la divergencia a la 1ª integral}}{=}$$

$$=\boxed{\oint_{S'}\frac{1}{2}\varepsilon_0(\phi\vec{E})\cdot d\vec{S}+\int_{V'}\frac{1}{2}\varepsilon_0E^2\,dV=U}$$

- Tengo una expresión que sólo depende de los campos!!!

· Es decir, si bien la expresión inicial nos muestra que la energía reside en las cargas, ↓ $V=\int\frac{1}{2}\rho\phi\, dV$

esta última expresión nos muestra que la energía está asociada al campo eléctrico!!!!

↓ Si no hay campo ⟹ no hay energía!!

(Ambas expresiones arrojan el mismo resultado, pero su interpretación física varía)

· Esto será muy útil al estudiar ondas electromagnéticas, donde no hay cargas pero sí campo.

- Ahora, si hacemos tender V' al infinito (a todo el espacio) ocurrirá lo siguiente:

$$\phi \approx \frac{1}{R}$$ → Como vimos en el desarrollo multipolar, muy lejos de una distribución ϕ decrece, como poco, como $\frac{1}{R}$

$$E \approx \frac{1}{R^2}$$ → Mismo argumento que ↑

$$ds \approx R^2$$ → Tomo una superficie esférica $\Rightarrow ds = R^2 \underbrace{\sin\theta\, d\theta\, d\phi}_{\approx 4\pi}$

Así, como mucho, $\oint E\, ds \approx \frac{1}{R} \Longrightarrow$ La integral de superficie tiende a 0

↳ Puede decrecer aún más rápido

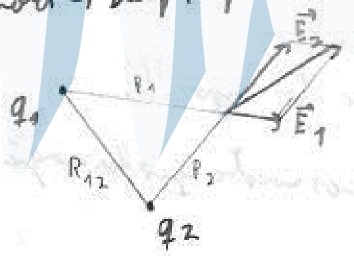
$$\Downarrow$$

$$\boxed{U = \int_\infty \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 dV}$$

. Esto nos incita a definir la densidad de energía asociada al campo:

$$\boxed{u \equiv \frac{dU}{dV} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2}$$

. Ahora tenemos un problema: antes vimos que U podía ser positiva o negativa. Pero es que ahora es siempre positiva!!!!! Veamos lo que ocurre con dos cargas puntuales:



$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$

↳ $|\vec{E}|^2 = E_1^2 + E_2^2 + 2\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2$

$$U = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int_\infty \overbrace{\underbrace{E_1^2}_{\sim \frac{1}{R^4}} \underbrace{dV}_{\sim R^3}}^{\sim \frac{1}{R}} + \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int_\infty E_2^2 dV + \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int_\infty 2\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2\, dV$$

$\sim \frac{1}{R}$ → Que en $R=0$ diverge!!!

Primer término: $= +\infty$!!! → Es integrable cuando $R_1 = 0 \Rightarrow E_1 = \infty$

Segundo término: $= +\infty$!!!!

↳ Esta integral es la que tiene un signo

↓

El error está en que si tomamos cargas puntuales ρ no tiene sentido, y al final aparece la energía de construir una carga puntual, lo cual es absurdo y lleva a singularidades

⇓

Al considerar el auto-campo, un valor positivo e infinito, U nos dará siempre un valor positivo

Si ρ continua, cuando ρ está definida, ρ ($\rho = \vec{\nabla}\vec{E}$)

(Al montar una distribución de carga ρ, $U > 0$. Pero al acercar dos distribuciones, aparece el término cruzado ($U \neq \sum U$))

• Y si hay un dieléctrico (Partimos de lo mismo):

$$U=\int_V \frac{1}{2}\rho_L \phi \, dV$$

↳ Estamos considerando la energía de las cargas libres

(olvidando la energía del dieléctrico)

Ahora, $\rho_L = \vec{\nabla}\cdot\vec{D} \Longrightarrow U=\int_V \frac{1}{2}\phi\,\vec{\nabla}\cdot\vec{D}\, dV$

De nuevo, tomando otro volumen V':

$$U=\int_{V'}\frac{1}{2}\phi\,\vec{\nabla}\cdot\vec{D}\, dV \underset{\downarrow}{=} \int_{V'}\frac{1}{2}\vec{\nabla}(\phi\vec{D})\,dV+\int_{V'}\frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E}\,dV =$$

$-\vec{\nabla}\phi=\vec{E}$,

halla o no dieléctrico

$\phi\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \vec{\nabla}(\phi\vec{D})-\vec{D}\vec{\nabla}\phi$

$$=\oint_{S'}\frac{1}{2}\phi\,\vec{D}\cdot d\vec{S}+\int_{V'}\frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E}\,dV$$

Y, de nuevo, tendiendo V' a infinito y aplicando los argumentos multipolares:

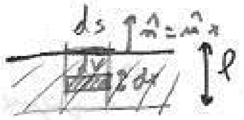
$$\boxed{U=\int_{\infty}\frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E}\,dV}$$

FUERZA SOBRE UN CONDUCTOR

• Se sabe que $d\vec F = \rho(\vec r)\,\vec E(\vec r)\,dV$. Pero es que $\vec E$ es discontinuo!!! ¿qué $\vec E$ uso?

• Podemos utilizar un modelo:

- Realmente, físicamente, la carga no se acumula en una superficie bidimensional, sino en un espesor muy pequeño l:



→ La carga ya no es superficial

⇓

Eliminamos la discontinuidad

- $dq = \sigma\, ds$

Pero, internamente, en realidad lo que hay es $\rho \Rightarrow dq = \rho\, l\, ds$

Así, $\sigma = \rho\, l$

- $\delta \vec F = \rho\, \vec E\, dV$. Si tomamos una región dx, $dV = ds\, dx$

Es un diferencial de orden mayor

Y si $\vec E$ sólo depende de x: $\delta \vec F = \rho\, ds\, dx\, \vec E(x)$. Además, al ser un conductor, $\vec E // x$

- Por Gauss, $\vec\nabla \cdot \vec E = \frac{\partial E}{\partial x} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \Leftrightarrow E = \frac{\rho}{\varepsilon_0} x + C$

Como en el interior del conductor $(x=0) \Rightarrow \vec E = 0 \Rightarrow E = \frac{\rho}{\varepsilon_0} x = \frac{\sigma x}{\varepsilon_0 l}$

- Así, $\delta \vec F = \rho \frac{\sigma x}{\varepsilon_0 l}\, ds\, dx\, \hat n$

Integrando nos queda la fuerza sobre el elemento de volumen:

$$d\vec F = ds \int_0^l \rho \frac{\sigma x}{\varepsilon_0 l}\, \hat n\, dx = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}\, \hat n\, ds$$

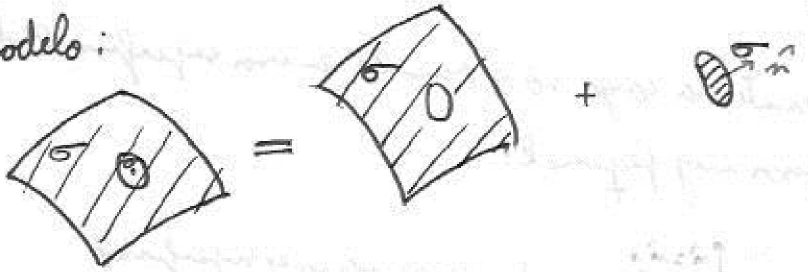
Al integrar, reducimos el orden del diferencial

Límite, sólo de la integral

· Así, $\boxed{\vec{F} = \int_S \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}\,\hat{n}\,ds}$; $\frac{dF}{ds} = P = \frac{\varepsilon_0}{2}\underbrace{E}_{\frac{\sigma}{\varepsilon_0}}{}^2$

Evidentemente, si el conductor está aislado, $\vec{F} = 0$ (la integral se anula pq. $\hat{n}$ va variando).

• Otro modelo:



$$\vec{E} = \vec{E}_{resto} + \vec{E}_{superficie}$$

Ahora, $\vec{E}_{\substack{superficie \\ plano}} = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\,\hat{n} \text{ fuera} \\ -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\,\hat{n} \text{ dentro} \end{cases}$

Así,
$$\left.\begin{aligned} \vec{E}_{fuera} &= \vec{E}_{resto} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\,\hat{n} \\ \vec{E}_{dentro} &= \vec{E}_{resto} - \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\,\hat{n} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \vec{E}_{resto} = \frac{1}{2}\left(\vec{E}_{fuera} + \vec{E}_{dentro}\right)$$

Pero esto lo sé calcular, pues <u>he eliminado la discontinuidad al hacer el agujero</u>!!

↳ De aquí sale el $\frac{1}{2}$