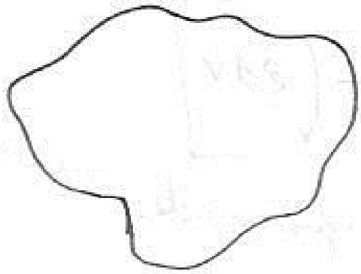
MEDIOS DIELÉCTRICOS

• Hasta ahora hemos estudiado $\vec{E}$ en el vacío, ahora lo estudiamos dentro de un material:



- El material está formado por moléculas:

Átomo

$Q=0$

$\vec{p}=0$

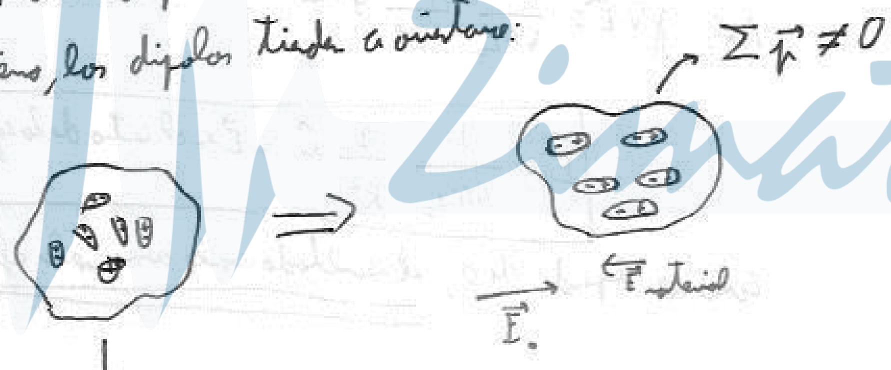
Molécula polar (H_2O, e.g.)

$Q=0$

$\vec{p}\neq 0$ (suele ser del orden de $1'6\cdot 10^{-29}$ $C\cdot m$) $\overset{e\cdot 18}{=}$ $4'8$ debye

se suele usar de unidad el debye $= 3'33\cdot 10^{-30}$ $C\cdot m$

- En general, los momentos dipolares de las moléculas polares están distribuidos al azar. Si se aplica $\vec{E}$ externo, los dipolos tienden a orientarse:



$\sum \vec{p}=0$ (azar)

$\vec{E}_{res.}$ $(\vec{E}_0+\vec{E}_{material})$

- En general, al no ser las cargas libres ($\equiv$ dieléctrico), $\vec{E}$ interior no será, en general, 0.

• Los momentos dipolares se pueden crear por: (en general se darán las 3 a la vez)

- Polarizabilidad electrónica o inducida: cuando $\vec{E}$ externo mueve el núcleo atómico $\Downarrow$ Se rompe simetría esférica $\Downarrow$ $\vec{p}\neq 0$

- Polarizabilidad dipolar: cuando las moléculas son polares, al aplicar $\vec{E}$ se reorganizan $\Rightarrow \vec{p}\neq 0$

- Polarizabilidad iónica: cuando una red iónica es distorsionada por un $\vec{E}$ externo

• Estudiamos $\vec{E}$ en el interior de un dieléctrico. Como varía bruscamente (· $\vec{E}$ de un dipolo varía con $\frac{1}{r^3}$), estudiamos el campo eléctrico medio.

– Para ello, estudiamos elementos de volumen dV en los que $\vec{E}$ es cte.:

El campo eléctrico real

$$\boxed{\vec{E} \equiv \langle \vec{e} \rangle = \frac{1}{V}\int_V \vec{e}\, dV}$$

– P.ej., sea una carga q en el espacio y una esfera con ρ cte.: → Dibujo a Moodle

Infinitamente pequeña como para que ρ sea cte.
↳ y lejos de q

La esfera ejerce sobre la carga q una fuerza $\vec{F} = -\overbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho V}{R^2}\hat{n}}^{\vec{E}_{esfera}} \cdot q$

Por la 3ª ley de Newton, la q ejerce una fuerza $-\vec{F}$ sobre la esfera. Pero es que esa fuerza vale $\int_V \vec{e}\, dq = \int_V \rho \cdot \vec{e}\, dV = \rho \underbrace{\int_V \vec{e}\, dV}_{\equiv V\cdot\vec{E}} = \rho V \vec{E}$

Así, $\cancel{\rho V} \vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\cancel{\rho V}}{R^2} q \cdot \hat{n}$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R^2}\hat{n} = \vec{E} \text{ en el centro de la esfera}}$$

Me permite evitar la hipótesis de esfera ↗ lejana y pequeña

Como no depende de ρ, el resultado vale aunque la esfera no esté cargada!!!!

Se podría ver como que, el límite cuando $\rho \to 0$, (esfera no cargada) se llega a esa conclusión.

– Generalizándolo al campo medio en una esfera creado por una distribución de carga ρ: a V_1

Dibujo a Moodle

$$\boxed{\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V_1}\frac{\rho}{R^2}\hat{n}\, dV}$$

- Pero, ¿y si la carga está dentro de la esfera?

Hago el truco de antes: le doy a la esfera una carga ρ.

La esfera crea un campo en su interior (Gauss) $-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho\cdot\frac{4}{3}\pi R^3}{R^2}\hat{n}$. Así:

$$\vec{F} = -\frac{\rho q}{3\varepsilon_0}\vec{R}$$

y sobre la esfera ejerce una fuerza $\frac{\rho q}{3\varepsilon_0}\vec{R} = \int_V \rho\vec{e}\,dV = \rho V\vec{E}$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{q\vec{R}}{3\varepsilon_0 V}}$$, ahora sí depende del volumen!!

De nuevo, tomando lím $\rho\to 0$, puedo generalizar el resultado a esferas sin carga

- Como antes: ¿y si en lugar de una carga puntual tenemos una distribución de carga ρ en un vol. V_1?:

$$\vec{E} = \frac{1}{3\varepsilon_0 V}\underbrace{\int_{V_1}\rho\vec{R}\,dV}$$

Es el momento dipolar neto de la distribución $\int$!!! respecto del centro de la esfera

(Cambiado de signo porque $\vec{R}$ en la integral va de dV al origen, pero en la def. de $\vec{p}$ va del origen a dV)

$$\boxed{\vec{E} = -\frac{\vec{\pi}}{3\varepsilon_0 V} = -\frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0} = \vec{E}}$$

Y si defino $\vec{P} \equiv \frac{d\vec{\pi}}{dV}$ ($\vec{p}$ no depende de dónde estoy en V_1)

$$\Downarrow$$

$\vec{P} = \frac{\vec{\pi}}{V}$ en este caso

- En general, si hay carga interna y carga externa:

$$\boxed{\vec{E} = \vec{E}_{ext} - \frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0}}$$

- Consideramos ahora un dieléctrico, con un punto dV en su interior. Este dV tiene dipolos en su interior. Sea $\vec{p}$ su suma. Definimos:

$\vec{r}$ que es ocupado por un volumen dV

$$\boxed{\vec{P}(\vec{r}) = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta V} = \frac{d\vec{p}}{dV}}$$

- Así, un dieléctrico será una distribución continua de dipolos dada por la función $\vec{P}(\vec{r})$.

• Quiero $\vec{E}$ en el interior. Pero $\vec{P}$ depende de $\vec{E}$ $\Rightarrow \vec{P}$ varía $\Rightarrow \vec{E}$ creado por dipolos varía

$\vec{E}$ varía

$\Downarrow$

$\vec{P}$ varía

(Tengo un círculo vicioso)

• ¿Cuánto vale $\vec{E}$ creado por el material?

↳ Olvidando el campo externo

El dipolo $d\vec{p}$ en dV crea un ϕ:

(Las distancias son grandes frente al tamaño del dipolo)

$$d\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{d\vec{p}\cdot\hat{n}}{\underbrace{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}_{R}{}^2}$$

Ahora, $\vec{\nabla}'\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right) = \frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = \frac{\hat{n}}{R^2}$

(1) Derivo con resp. a x', y', z'

$$\vec{P} = \frac{d\vec{p}}{dV}$$

$$\text{Así, } d\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{P}\cdot d'V\cdot\hat{n}}{R^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\vec{P}\cdot\vec{\nabla}'\left(\frac{1}{R}\right)d'V$$

Ahora, $\underbrace{\vec{\nabla}'\cdot\left(\frac{\vec{P}}{R}\right)}_{\text{Divergencia}} \underset{\text{Regla de Leibnitz}}{=} \frac{1}{R}\vec{\nabla}'\cdot\vec{P} + \vec{P}\cdot\vec{\nabla}'\left(\frac{1}{R}\right)$. Por tanto, $\vec{P}\cdot\vec{\nabla}'\left(\frac{1}{R}\right) = \vec{\nabla}'\cdot\left(\frac{\vec{P}}{R}\right) - \frac{1}{R}\vec{\nabla}'\cdot\vec{P}$. Así:

$$\phi(\vec{r}) = \int_V d\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \vec{\nabla}'\cdot\left(\frac{\vec{P}}{R}\right)d'V - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\vec{\nabla}'\cdot\vec{P}}{R}d'V$$

Aplicando el tma. de la divergencia a la primera integral:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oint_S \frac{\vec{P}\cdot\hat{n}}{R}dS - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\vec{\nabla}'\cdot\vec{P}}{R}d'V$$

Ahora:

- Una distribución volúmica crea $\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho}{R}\,dV$

- Una distribución superficial crea $\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_S \frac{\sigma}{R}\,dS$

· Así que el material se comporta como si tuviera una distribución superficial de carga $\vec{P}'\cdot\hat{n}$ y una distribución volúmica $-\vec{\nabla}'\cdot\vec{P} \Longrightarrow$ Hemos reducido el problema a un problema conocido.

· Por tanto, si definimos:

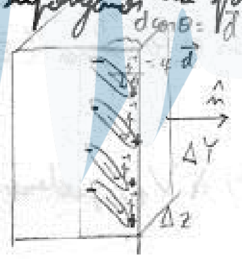
. Densidad superficial de polarización $\boxed{\sigma_p \equiv \vec{P}\cdot\hat{n}}$

. Densidad volúmica de polarización $\boxed{\rho_p \equiv -\vec{\nabla}'\cdot\vec{P}}$

Queda $\boxed{\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oint_S \frac{\sigma_p}{R}\,dS + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho_p}{R}\,d'V} \Longrightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oint_S \frac{\sigma_p}{R^2}\hat{n}\,dS + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho_p}{R^2}\hat{n}\,d'V}$

Potenciales iguales $\Downarrow$ cargas iguales

¿Esto de donde viene? Supongamos un paralelepípedo infinitesimal:



El volumen vale:

$$V = \vec{d}\cdot\hat{n}\,\Delta Y\,\Delta Z$$

Y si tengo N dipolos por udd. de volumen:

Hay $N\vec{d}\cdot\hat{n}\,\Delta Y\Delta Z$ dipolos

En la superficie hay una carga positiva $dq = \overset{\text{dipolos/vol}}{N}\cdot \underset{\text{carga de cada dipolo}}{q}\cdot\vec{d}\,\hat{n}\,\underbrace{\Delta Y\Delta Z}_{\text{Volumen}} =$

$$= \vec{P}\cdot\hat{n}\,\Delta Y\Delta Z = \vec{P}\cdot\hat{n}\,dS$$

Y como he considerado una carga a la superficie, habrá carga tb. en el interior, que será la diferencia entre las cargas superficiales cambiada de signo (pues la carga total es 0) $\Longrightarrow$ De ahí sale el gradiente

- Ahora, lo lógico es que $\oint_S \sigma_P \, ds + \int_V \rho_P \, dV = 0$, por ser la carga total 0 (ya hemos visto que, eléctricamente, el material formado por dipolos y el material con densidades σ_P y ρ_P son lo mismo).

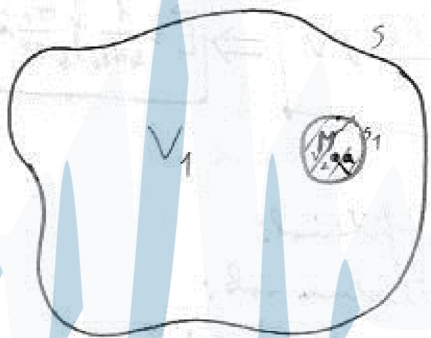
Demostrémoslo:

$$\oint_S \sigma_P \, ds + \int_V \rho_P \, dV = \oint_S \vec{P}\cdot\hat{n} \, ds - \int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{P} \, dV \underset{\text{Teo. de divergencia}}{=} \oint_S \vec{P}\cdot\hat{n} \, ds - \oint_S \vec{P}\cdot\hat{n} \, ds = 0$$

- Es decir, aparte de ser un artificio matemático, como se ha visto, tb. tiene cierto sgdo. físico.

- De todas formas, lo importante es que hemos reducido el problema a uno que sabemos resolver.

• ¿Cuánto vale $\vec{E}$ en el interior? Ahí la aproximación dipolar ya no sirve: hay dipolos muy cerca del pto. donde calculo $\vec{E}$.



- Considero una esfera infinitesimal alrededor de M
$\Downarrow$
$\vec{P}$ cte.

- El campo es la suma de lo que crea la región exterior a la esfera ($\vec{E}_1$) y la región interior ($\vec{E}_2$)

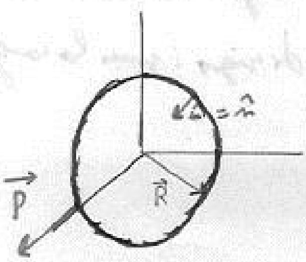
- $\vec{E}_1$ será el creado por el exterior. Como $M \notin V_1$, podemos aplicar la aproximación dipolar:

$$\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oint_{S+S_1}\frac{\sigma_P}{R^2}\hat{u} \, ds + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V_1}\frac{\rho_P}{R^2}\hat{u} \, dV$$

↳ Justificación a lo que veremos al final

- Ahora, al ser $\vec{P}$ cte. en V_2, es cte. en la frontera (S_1) $\Rightarrow$ Elijo el eje OX para que $\vec{P} \parallel OX$

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oint_{S_1}\frac{\sigma_P}{R^2}\hat{u} \, dS = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oint_{S_1}\frac{\vec{P}\cdot\hat{n}}{R^2}\hat{u} \, dS$$



Además, al estar el origen en el centro de la esfera, $\hat{u} = \hat{n} = -\frac{\vec{R}}{R} = -\frac{x\hat{u}_x + y\hat{u}_y + z\hat{u}_z}{R}$

Así, $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oint_{S_1}\frac{\vec{P}\cdot\hat{n}}{R^2}\hat{u} \, ds = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oint_{S_1}\frac{P\cdot n_x}{R^2}\cdot -\frac{\vec{R}}{R} \, ds =$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oint_{S_1}\frac{P\cdot + \frac{x}{R}}{R^2}\cdot -\frac{\vec{R}}{R} \, ds = \frac{P}{4\pi\varepsilon_0}\oint_{S_1}\frac{x}{R^4}\vec{R} \, ds$$

Como $\vec{R} = x\hat{u}_x + y\hat{u}_y + z\hat{u}_z$, esto son 3 integrales:

- $\hat{u}_x \frac{P}{4\pi\varepsilon_0} \oint_{S1} \frac{x^2}{R^4} ds$
- $\hat{u}_y \frac{P}{4\pi\varepsilon_0} \oint_{S1} \frac{xy}{R^4} ds$
- $\hat{u}_z \frac{P}{4\pi\varepsilon_0} \oint_{S2} \frac{xz}{R^4} ds$

La superficie es esférica:

- $x = R\,\text{sen}\,\theta \cos\phi$
- $y = R\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\phi$
- $z = R\cos\theta$
- $ds = R^2\,\text{sen}\,\theta\, d\theta\, d\phi$

- La componente x de la integral vale:

$$\frac{P}{4\pi\varepsilon_0}\oint_{S1} \frac{\cancel{R^2}\,\text{sen}^2\theta\cos^2\phi}{\cancel{R^4}} \cancel{R^2}\,\text{sen}\,\theta\, d\theta\, d\phi =$$

$$= \frac{P}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{\pi} \text{sen}^3\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} \cos^2\phi\, d\phi =$$

$$= \frac{P}{4\pi\varepsilon_0}\underbrace{\left[-\cos\theta + \frac{1}{3}\cos^3\theta\right]_0^{\pi}}_{= \frac{4}{3}} \underbrace{\left[\frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{2}\,\text{sen}\,\varphi\cos\varphi\right]_0^{2\pi}}_{= \pi} = \frac{P}{3\varepsilon_0}$$

- La componente y:

$$\frac{P}{4\pi\varepsilon_0}\oint_{S1} \frac{\cancel{R^2}\,\text{sen}^2\theta\,\text{sen}\,\phi\cos\phi}{\cancel{R^4}} \cancel{R^2}\,\text{sen}\,\theta\, d\theta\, d\phi = \frac{P}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{\pi} \text{sen}^3\theta\, d\theta \underbrace{\int_0^{2\pi} \text{sen}\,\phi\cos\phi\, d\phi}_{= \frac{1}{2}\text{sen}^2\phi\big|_0^{2\pi} = 0} = 0$$

- La componente z:

$$\frac{P}{4\pi\varepsilon_0}\oint_{S1} \frac{\cancel{R^2}\,\text{sen}\,\theta\cos\theta\cos\phi}{\cancel{R^4}} \cancel{R^2}\,\text{sen}\,\theta\, d\theta\, d\phi = \frac{P}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{\pi} \text{sen}^2\theta\cos\theta\, d\theta \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos\phi\, d\phi}_{= \text{sen}\,\phi\big|_0^{2\pi} = 0} = 0$$

Es decir, $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oint_{S1} \frac{\vec{P}\cdot\hat{n}}{R^2}\hat{n}\, ds = \frac{\overbrace{P\hat{u}_x}^{= \vec{P}}}{3\varepsilon_0} = \boxed{\frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0}}$

- Obtener $\vec{E}_2$ es fácil: ya vimos que:

$$< \vec{E}_2 > = -\frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0}$$

. Si hubiera tomado otra esfera más pequeña, $<\vec{E}>$ sería el mismo ($\vec{P}$ es cte. en toda la esfera)

$\Downarrow$

Llevamos el proceso de reducción al límite

$\Downarrow$

En el límite, $<\vec{E}> = \vec{E}_{2M}$

$\Downarrow$

$$\vec{E}_2 = -\frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0}$$

- Así; $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oint_S \frac{\sigma_P}{R^2}\hat{u}\,dS + \underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oint_{S_1}\frac{\sigma_P}{R^2}\hat{u}\,dS}_{=\frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V_1}\frac{\rho_P}{R^2}\hat{u}\,d'V - \frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0} =$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oint_S \frac{\sigma_P}{R^2}\hat{u}\,dS + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho_P}{R^2}\hat{u}\,d'V$$

En el interior de $V_2 \to \vec{P}$ cte. $\to \vec{\nabla}\cdot\vec{P} = 0$

$$\rho_P = 0 \Rightarrow \int_V \frac{\rho_P}{R^2}\hat{u}\,d'V = \int_{V_1}\frac{\rho_P}{R^2}\hat{u}\,d'V + \underbrace{\int_{V_2}\frac{\rho_P}{R^2}\hat{u}\,d'V}_{=0} =$$

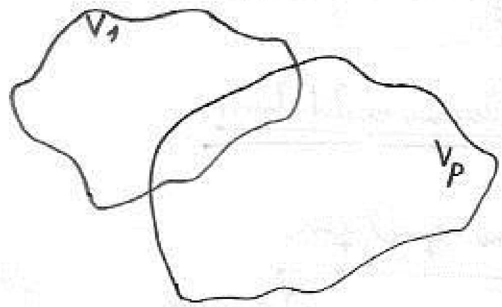
$$= \int_{V_1}\frac{\rho_P}{R^2}\hat{u}\,d'V$$

- Es decir, la fórmula para $\boxed{\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oint_S \frac{\sigma_P}{R^2}\hat{u}\,dS + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho_P}{R^2}\hat{u}\,d'V}$ vale tanto para el interior como para el exterior de un dieléctrico.

- En Moodle hay un ejemplo de aplicación

VECTOR DESPLAZAMIENTO

· Sea una distribución de cargas libres V_1 y un dieléctrico que ocupa un volumen V_p:
↳ no forman parte del dieléctrico



· Las cargas libres crean $\vec{E}_1 \Rightarrow$ Afecta al dieléctrico $\Rightarrow$ Aparece $\vec{P} \Rightarrow$ Aparece $\vec{E}_p \Rightarrow$ Varía $\vec{E} \Rightarrow$ Varía $\vec{P}$...

· En el equilibrio $\boxed{\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_p}$. Ahora, $\vec{P}$ y $\vec{E}$ dependen el uno del otro $\Rightarrow$ Necesito más ecuaciones

$$\vec{P} \Updownarrow \vec{E}_p$$

· Las ecuaciones de campo son:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_1 = \frac{\rho_1}{\varepsilon_0} \qquad \vec{\nabla} \times \vec{E}_1 = 0$$

Y como el dieléctrico crea el $\vec{E}$ que crea σ_P y ρ_P:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_p = \frac{\rho_P}{\varepsilon_0} = -\frac{1}{\varepsilon_0} \vec{\nabla} \cdot \vec{P}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}_p = 0$$

Así, $\underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{E}}_{\vec{\nabla} \text{ es lineal}} = \frac{1}{\varepsilon_0} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_1 + \vec{\nabla} \cdot \vec{E}_p) = \frac{1}{\varepsilon_0} (\rho_1 - \vec{\nabla} \cdot \vec{P}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{E}$

Este - indica que el dieléctrico intenta disminuir $\vec{E}$ (o disminuir la carga)

$$\underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0}_{\vec{\nabla} \text{ es lineal}}$$

Es decir: $\boxed{\vec{\nabla} \cdot (\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho_1}$

Y como me gustaría que (por analogía con el vacío) la divergencia de algo sean las cargas libres, defino el <u>vector desplazamiento</u> o <u>inducción eléctrica</u>.

$$\boxed{\vec{D} \equiv \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}}$$

Por tanto: $\boxed{\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{D}=\rho_1}} \Longrightarrow$ Tma de Gauss: $\boxed{\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{s} = \int_{V_1}\rho_1 dV = Q_{int}}$

Un problema análogo al de electrostática en el vacío, que sé resolver!!!

Así, una vez obtengo $\vec{D}$, $\boxed{\vec{E}=\frac{1}{\varepsilon_0}(\vec{D}-\vec{P})}$. Pero ahora necesito $\vec{P}$!!!

- Pero $\vec{P}$ dependerá del material $\Longrightarrow$ Relaciones constitutivas

  - Definimos un material lineal como aquél que:

$$\boxed{\vec{P}=\varepsilon_0 \chi_e \vec{E}}$$

E, $\vec{E}$ total, no $\vec{E}_0$

Isótropo (Si solo fuese χ_e sin una matriz)

($\vec{P}$ paralelo a $\vec{E}$ y con cte de proporcionalidad cte.)

χ_e: Susceptibilidad eléctrica (no depende del punto)

$\Downarrow$

$\vec{\nabla}\times\vec{D}=0$

  - Trabajamos con materiales lineales, homogéneos e isótropos.

  - $[\vec{P}] = \frac{[\vec{p}]}{L^3} = \frac{C\cdot L}{L^3} = \frac{C}{L^2}$

$[\varepsilon_0 \vec{E}] = \frac{C}{L^2}$ $\Longrightarrow$ χ_e es adimensional!!

$E \propto \frac{1}{\varepsilon_0}\cdot\frac{C}{L^2}$

  - Vamos, ahora que tenemos $\vec{P}(\vec{E})$, obtener varias relaciones:

    - $\vec{D} \equiv \varepsilon_0\vec{E}+\vec{P} = \varepsilon_0\vec{E}+\varepsilon_0\chi_e\vec{E} = \varepsilon_0(1+\chi_e)\vec{E}$

      Y si definimos $\varepsilon \equiv \varepsilon_0(1+\chi_e)$: $\boxed{\vec{D}=\varepsilon\vec{E}}$

      $\varepsilon_r \equiv \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = 1+\chi_e$

    - $\vec{P}=\vec{D}-\varepsilon_0\vec{E} = \varepsilon\vec{E}-\varepsilon_0\vec{E} \Rightarrow \boxed{\vec{P}=(\varepsilon-\varepsilon_0)\vec{E}} \underset{\vec{D}=\varepsilon\vec{E}}{\Longrightarrow} \boxed{\vec{P}=\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon}\vec{D}}$

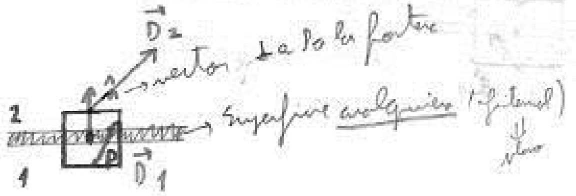
    - Por lo que hay una relación entre las cargas:

$$\underbrace{\vec{\nabla}\cdot\vec{P}}_{=-\rho_p} = \frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon}\underbrace{\vec{\nabla}\cdot\vec{D}}_{=\rho_1}$$

$$\boxed{\boxed{-\rho_p = \frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon}\rho_1}}$$

CONDICIONES DE CONTORNO

· Estudiaremos lo que le ocurre a $\vec{D}$ y $\vec{E}$ al pasar de un medio a otro:



- Tomamos un paralelepípedo de Gauss // a la frontera
- Hacemos $h \to 0$ para estudiar $\vec{D}$ (que es más fácil de obtener) en P:

$$\oint \vec{D}\cdot d\vec{s} = \int_{B_1} \vec{D}\cdot d\vec{s} + \int_{B_2} \vec{D}\cdot d\vec{s} + \underbrace{\int_{\text{lateral}} \vec{D}\cdot d\vec{s}}_{\to 0 \text{ pq. } h \to 0}$$

($\vec{D}$ no se hará inmensamente grande)

- Al haber tomado bases infinitesimales (Δs), $\vec{D}$ es cte. en ellas:

$$\oint \vec{D}\cdot d\vec{s} = \vec{D}_2 \cdot \hat{n}\,\Delta s - \vec{D}_1 \cdot \hat{n}\,\Delta s$$

$\hat{n}_{B_2} = -\hat{n}_{B_1}$, y le llamo $\hat{n} \equiv \hat{n}_{D_1}$

- Por Gauss, lo de arriba es la carga libre:

$$Q_\ell = \rho_\ell\, h\,\Delta s + \sigma_\ell\, \Delta s \xrightarrow[h \to 0]{} \sigma_\ell\, \Delta s$$

- Es decir: $\vec{D}_2 \cdot \hat{n}\,\Delta s - \vec{D}_1 \cdot \hat{n}\,\Delta s = \sigma_\ell\, \Delta s$

$$\hat{n}\cdot(\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \sigma_\ell$$

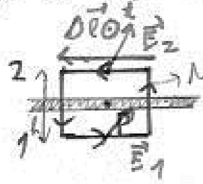
Con:
- $\hat{n}$ de 1 a 2
- σ_ℓ la σ de la frontera

Y como p.e. = prod. de comp.:

$$\boxed{D_{2n} - D_{1n} = \sigma_\ell} \Rightarrow \vec{D} \text{ presenta una discontinuidad proporcional a } \sigma \text{ !!}$$

y E ($E = \varepsilon D$)

• Vamos ahora a calcular la componente tangencial. Como no sé con seguridad si $\vec{\nabla}\times\vec{D}=0$, ahora hay que obtener $\vec{E}$, t.q. $\vec{\nabla}\times\vec{E}=0$. Tomamos el siguiente circuito:



→ Nótese que este circuito lo puedo rotar y el resultado es el mismo

$$\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l}=0$$

– Si hacemos $h\to 0$, igual que antes, la parte longitudinal es infinitesimal:

$$\vec{E}_2\,\Delta\vec{l}-\vec{E}_1\,\Delta\vec{l}=0$$

Con el $\Delta\vec{l}$ definido arriba.

– Ahora, definimos un unitario $\hat{t}$ t.q. $\Delta\vec{l}=\Delta l\,(\hat{t}\times\hat{n})$

$\hat{t}$ nos está indicando la orientación del circuito (que, recordemos, se puede girar)

– Sustituyendo:

$$0=\Delta l(\vec{E}_2-\vec{E}_1)\cdot(\hat{t}\times\hat{n})\underset{\substack{\downarrow\\ \text{Prop. del}\\ \text{producto triple}}}{=}\Delta l\,\hat{t}\cdot[\hat{n}\times(\vec{E}_2-\vec{E}_1)]=0$$

Es decir:

$\hat{t}\cdot[\hat{n}\times(\vec{E}_2-\vec{E}_1)]=0$, pero esto ocurre para cualquier orientación

$$\Updownarrow$$

$$\forall\hat{t}$$

$$\Downarrow$$

$$\hat{n}\times(\vec{E}_2-\vec{E}_1)=\vec{0}$$

– Y si E_t es la componente tangencial, $|\hat{n}\times(\vec{E}_2-\vec{E}_1)|=(\vec{E}_2-\vec{E}_1)_t=E_{2t}-E_{1t}=0$

$$\boxed{E_{1t}=E_{2t}}\Rightarrow \text{La componente tangencial es \underline{continua}}$$

• Nota: si 1 fuera un conductor: $\begin{cases}\vec{E}_1=0\\ \vec{P}_1=0\end{cases}\Rightarrow\vec{D}_1=0\Rightarrow\boxed{D_{2n}=\sigma_l}$

$$\vec{E}_1=0\Rightarrow E_{1t}=0\Rightarrow\boxed{E_{2t}=0}$$