# ELECTROSTÁTICA EN EL VACÍO

**Definición**: la fuerza electromagnética es la interacción entre cargas eléctricas (la carga es, como la masa, una propiedad de la partícula; pudiendo ser la carga positiva o negativa)

Resultados experimentales:

• Conservación de la carga: en un sistema aislado la suma de las cargas permanece cte. → Demostrable

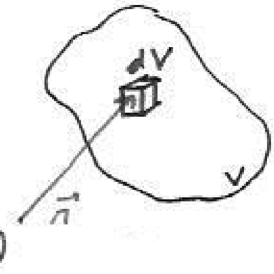
• Cuantización: se observa experimentalmente que la carga eléctrica está cuantizada ($e = 1'6 \cdot 10^{-19}$ C) → No demostrable (experimental)

• La carga eléctrica es invariante respecto del S.R. → Demostración compleja y avanzada

- Definimos una carga puntual como un cuerpo cargado cuyas dimensiones son mucho más pequeñas que las manejadas en el problema $\Longrightarrow$ Esto nos llevará a singularidades

- Como trabajamos con muchos portadores elementales (del orden de $10^{20}$ en volúmenes pequeños), podemos suponer que la carga estará distribuida de forma continua, y definir la densidad de carga:

$$\boxed{\rho(\vec{r}) \equiv \frac{dq}{dV}}$$



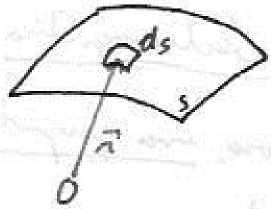

Siendo $dq$ la carga total que hay en el elemento de volumen $dV$ (situado alrededor de $\vec{r}$)

$\Downarrow$

A cada punto se le asocia un campo escalar, que nos dice cuánta carga por unid. de volumen hay en ese punto.

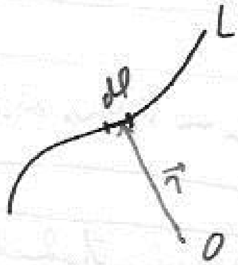
. Análogamente, si la carga está distribuida a una superficie:

$$\boxed{\sigma(\vec{r}) \equiv \frac{dq}{ds}}$$




. Y si está distribuida en una curva:

$$\boxed{\lambda(\vec{r}) \equiv \frac{dq}{dl}}$$



# ESTUDIO DE INTERACCIONES

(Gráfico en Moodle)

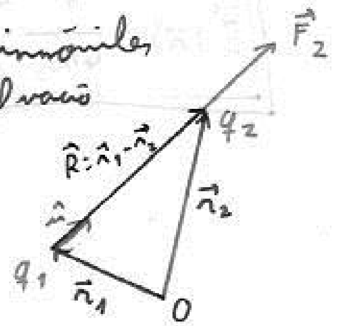
- Sean un cjto. de cargas puntuales
- Situamos una nueva carga para observar el efecto de las otras cargas sobre ella
- Aparecerán dos interacciones sobre nuestra carga de prueba:
  - $\vec{F}_E$, que no depende de la velocidad de la carga (se dice debida a un campo eléctrico)
  - $\vec{F}_M$, que depende de la velocidad de la carga (se dice debida a un campo magnético)

- Definimos así el campo eléctrico $\vec{E}$, para estudiar las propiedades del cjto. de cargas independientemente de la carga de prueba:

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) \equiv \lim_{q' \to 0} \frac{\vec{F}_E}{q'}} \qquad [\vec{E}] = \frac{N}{C}$$

Porque queremos que la carga $q'$ no afecte al sistema. Sea tan pequeña que

- Ley de Coulomb: sean dos cargas inmóviles que interaccionan en el vacío




$$\boxed{\vec{F}_2 = K \frac{q_1 q_2}{R^2} \hat{u} = k \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}$$

De su formulación se deduce:
- Cumple la 3ª ley de Newton (aparecería una fuerza $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$) (ya que $\vec{r}_1 - \vec{r}_2 = -(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$)
- Es central
- K es una cte. determinada por experimentos (en el S.I., $K = 8'98 \cdot 10^9 \frac{kg\, m^3}{s^2 C^2}$) ($\frac{N \cdot m^2}{C^2}$)
- Normalmente, K se redefine por $K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$, con $\varepsilon_0 = 8'854 \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{N m^2}$ (Permeabilidad eléctrica del vacío)

· Como $K >>$, la fuerza es muy fuerte: entre dos $e^-$, es $4 \cdot 10^{42}$ veces más fuerte que la gravitatoria

- Para que entre dos cuerpos se cumpla $F_e = F_g$, debe ocurrir que $\frac{q}{m} \simeq 8 \cdot 10^{-11}$ C/kg. En el caso de la Tierra, sería $q \simeq 10^{13}$ C, enorme

$\Downarrow$

- En interacciones entre cargas, la fuerza gravitatoria no suele jugar ningún papel

- La fuerza gravitatoria aparece a gran escala, donde no suele haber cargas libres

· Principio de superposición: el campo resultante de un sistema de cargas es la suma vectorial del campo creado por cada carga. Así:

$$\vec{E}_i = \lim_{q' \to 0} \frac{1}{q'} \vec{F}_i = \boxed{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_i}{R_i^2} \hat{u}_i = \vec{E}_i}$$

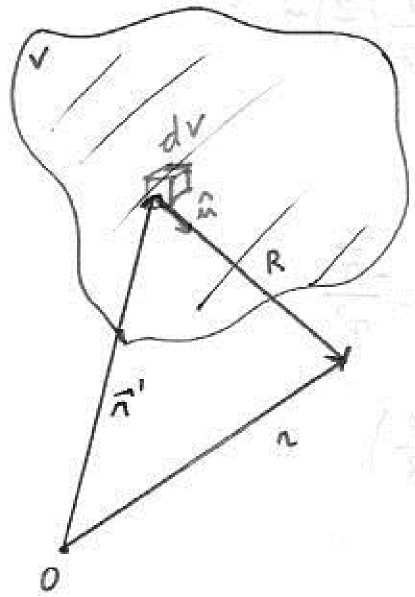
Y el campo total creado por N cargas:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N} \vec{E}_i$$

$\Downarrow$

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{R_i^2} \hat{u}_i}$$

· **Distribución volúmica de carga:** sea un volumen V con una densidad de carga $\rho(\vec{r}\,')$.




Tomamos un elemento dV. Como puede ser tan pequeño como queramos, se simplifica:

· $\rho$ cte. en dV

· Será una carga puntual de valor $dq = \rho(\vec{r}\,')\,dV$

$\Downarrow$

Creará un campo $d\vec{E} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\dfrac{\rho(\vec{r}\,')\,dV}{R^2}\,\hat{u}$

Por el ppo. de superposición, el campo será la suma de todas las contribuciones elementales $d\vec{E}$ $\Rightarrow$ una integral:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho(\vec{r}\,')}{R^2}\,\hat{u}\,dV$$

Ahora, como: · $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}\,'$

· $\hat{u} = \dfrac{\vec{R}}{R}$

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\,(\vec{r}-\vec{r}\,')\,dV}$$

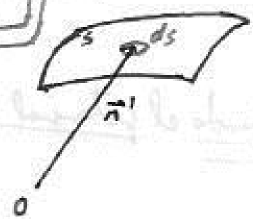
Nota: · Se integra respecto de $\vec{r}\,'$ (es la variable, varía barriendo V)

· $\vec{r}$ es cte.

Analogamente:

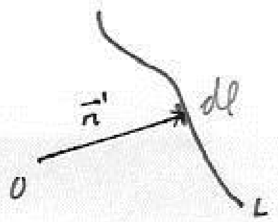
· **Distribución superficial de carga:**

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_S \frac{\sigma(\vec{r}\,')}{R^2}\,\hat{u}\,dS}$$




· **Distribución lineal de carga:**

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_L \frac{\lambda(\vec{r}\,')}{R^2}\,\hat{u}\,dl}$$



• En las integrales, siempre aparece:

$$\frac{1}{R^2}\hat{n} = \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}(\vec{r}-\vec{r}\,')$$

Ahora, calculamos $\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)\hat{u}_x + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right)\hat{u}_y + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)\hat{u}_z =$

Cociente

$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^2}\cdot\frac{x}{r} = -\frac{x}{r^3}$

$$= -\frac{x}{r^3}\hat{u}_x - \frac{y}{r^3}\hat{u}_y - \frac{z}{r^3}\hat{u}_z = \frac{-\vec{r}}{r^3}$$

Por tanto, $\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}(\vec{r}-\vec{r}\,') = -\vec{\nabla}_{\vec{r}}\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right) = -\vec{\nabla}_{\vec{r}}\left(\frac{1}{R}\right)$

Derivamos con resp. a $x, y, z$
NO resp. a $x', y', z'$
↳ Se toman como ctes.

Así: $\vec{E}(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \rho(\vec{r}\,')\,\vec{\nabla}_{\vec{r}}\left(\frac{1}{R}\right)dV = -\vec{\nabla}_{\vec{r}}\left(\overbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho(\vec{r}\,')}{R}dV}^{\text{Escalar}}\right)$

$\rho$ NO depende de $\vec{r} \Rightarrow$ es cte

$\Downarrow$ ($\vec{\nabla}$ es lineal)

$\int_V \vec{\nabla}_{\vec{r}}\left(\rho(\vec{r}\,')\frac{1}{R}dV\right)$

$\Downarrow$ $\vec{r}$ y $\vec{r}\,'$ son independientes
↳ variable de integración

$\vec{\nabla}_{\vec{r}}\left[\int_V \rho(\vec{r}\,')\frac{1}{R}dV\right]$

Es decir, podemos poner el campo $\vec{E}$ como menos el gradiente de un campo escalar!!!

• Definiendo el potencial electrostático $\phi(\vec{r})$:

$$\boxed{\begin{array}{c}\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho(\vec{r}\,')}{R}dV \\[2ex] \vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{r})\end{array}}$$

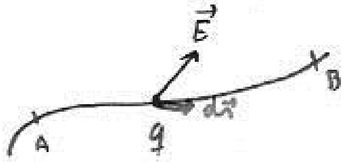
- De lo que se deduce:

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = \vec{\nabla}\times[-\vec{\nabla}\phi] = 0$$

$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\psi) = 0 \ \forall\psi$

$$\boxed{\vec{\nabla}\times\vec{E} = 0}$$

- Estudiamos el trabajo de la fuerza electrostática:




$$W = \int_A^B \vec{F}_e\cdot d\vec{r} = \int_A^B q\vec{E}\cdot d\vec{r} = -q\int_A^B \vec{\nabla}\phi\cdot d\vec{r} = -q\int_A^B d\phi =$$

$\vec{\nabla}\psi\cdot d\vec{r} = d\psi \ \forall\psi$

$$= \boxed{q\,[\phi(A) - \phi(B)] = W} \Rightarrow \vec{E} \text{ es conservativo}$$

Así que la energía potencial es $\boxed{U = q\cdot\phi}$

- $\boxed{[\phi] = \frac{J}{C} \equiv V}$ (voltio)

Así, como $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi \Rightarrow [\vec{E}] = \frac{[\phi]}{[\ell]} = \boxed{\frac{V}{m} = [\vec{E}]}$

- Si tomamos el trabajo en una curva cerrada:

$$\phi(A) - \phi(B) = \int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{r}$$ (Hemos dividido por $q$)

Curva cerrada:

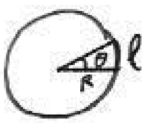
$$\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{r} = \phi(A) - \phi(A) = 0$$

Es decir:

$$\boxed{\begin{gathered}\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{r} = 0 \quad \forall \text{ curva cerrada} \\ \Updownarrow \text{(matemáticas)} \\ \vec{\nabla}\times\vec{E} = 0\end{gathered}}$$

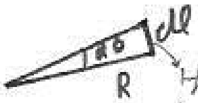
# ÁNGULOS

2D:



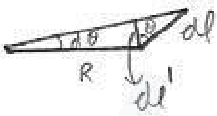
$\Rightarrow \theta = \frac{l}{r}$ $\qquad 0 \leq \theta < 2\pi$

Infinitesimalmente:



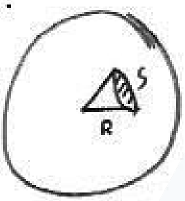

$$d\theta = \frac{dl}{R}$$

Y en cualquier curva:



$$d\theta = \frac{dl'}{R} = \frac{dl\cos\theta}{R}$$

3D:



El ángulo sólido nos da una idea de cuánto abrimos el cono. Para que sea adimensional y no dependa de la esfera:

$$\Omega \equiv \frac{S}{R^2}$$

$\Omega_{mín} = 0$ (no abrimos el cono)

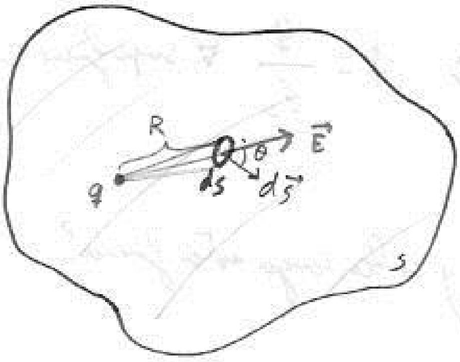
$$\Omega_{máx} = \frac{S_{máx}}{R^2} = \frac{4\pi \cancel{R^2}}{\cancel{R^2}} = 4\pi$$

Infinitesimalmente, con cualquier curva:


$$d\Omega = \frac{dS\cos\theta}{R^2}$$

# TEOREMA DE GAUSS

→ Sea una carga $q$ encerrada en una superficie cerrada cualquiera:




• Nos fijaremos en el campo que crea la carga en todos los puntos de la superficie.

• Tomando un pequeño elemento de superficie $d\vec{s}$ → hacia fuera del volumen limitado, que cumple:

1 - $d\vec{s}$ es prácticamente plano

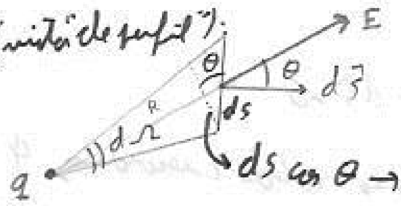
2 - $\vec{E}$ es prácticamente cte. en los puntos de $d\vec{s}$

definimos el flujo elemental a través de $d\vec{s}$:

$$d\phi = \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q\cos\theta}{R^2}\,ds$$

El flujo a través de toda la superficie se obtiene integrando.

. Antes, nos fijamos (vista de perfil):




$ds\cos\theta$ → un área plana $\perp$ a R

⇓

Coincide con el área infinitesimal de una superficie esférica de radio R centrada en $q$

↳ $d\Omega = \dfrac{\cos\theta\, ds}{R^2}$ será el ángulo sólido subtendido por $ds$

· Es decir, $d\phi = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\, q\, d\Omega$ → Tengo el flujo dependiendo de cuánto abre el cono para abarcar $ds$

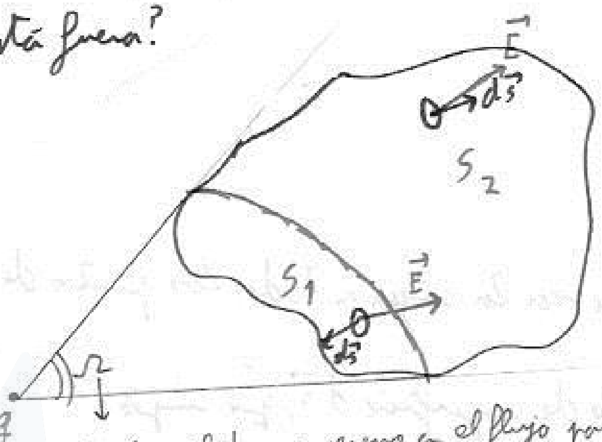
- Y el flujo total:

$$\phi = \oint_S d\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q \oint_S d\Omega = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{4\pi} \underbrace{d\Omega}_{4\pi} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Variando de 0 a $4\pi$, recorremos todo S → abarcamos

Es decir, $\phi = \dfrac{q}{\varepsilon_0}$ $\forall$ superficie cerrada

- Ahora, ¿y si la carga está fuera?




ángulo sólido que recorro a el flujo para abarcar toda la superficie S

$$\phi = \int_{S_1} \vec{E}\cdot d\vec{s} + \int_{S_2} \vec{E}\cdot d\vec{s}$$

Ahora, en $S_1$ el ángulo entre $\vec{E}$ y $d\vec{s}$ es obtuso ($\vec{E}$ entra en la superficie y $d\vec{s}$ sale) (En la frontera entre $S_1$ y $S_2$ $\vec{E} \perp d\vec{s}$)

$$\Downarrow$$

$$\vec{E}\cdot d\vec{s} < 0$$

En $S_2$ el ángulo entre $\vec{E}$ y $d\vec{s}$ es agudo $\Rightarrow \vec{E}\cdot d\vec{s} > 0$

Y como para $S_1$ y $S_2$ recorremos el mismo ángulo sólido (recordemos, $d\phi$ sólo depende de ese ángulo)

$$\Downarrow$$

$$\int_{S_1} \vec{E}\cdot d\vec{s} = -\int_{S_2} \vec{E}\cdot d\vec{s} \Rightarrow \phi = 0$$

- Y por el ppo. de superposición: $\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i = \sum_{\text{fuera}} \vec{E}_i + \sum_{\text{dentro}} \vec{E}_i$

$$\phi = \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{s} = \oint_S \left(\sum \vec{E}_i\right)\cdot d\vec{s} \underset{\text{distributiva}}{=} \oint_S \sum (\vec{E}_i \cdot d\vec{s}) = \sum_i \oint_S \vec{E}_i\cdot d\vec{s} = \underbrace{\sum_{\text{fuera}} \oint_S \vec{E}_i\cdot d\vec{s}}_{=0} + \sum_{\text{dentro}} \oint_S \vec{E}_i\cdot d\vec{s} =$$

$$= \sum_{\text{dentro}} \frac{q_i}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{\phi = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{\text{interior}} q_i \quad \forall S \text{ cerrada}}$$

Ejemplo de aplicación en Moodle

– Y, ¿en el caso de distribuciones continuas de carga?

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\varepsilon_0} Q_{\text{interior}}$$

Y si la superficie limita un volumen V, $Q_{\text{interior}} = \int_V \rho \, dV$ (si hay zonas vacías dentro de V, ahí $\rho = 0$). Es decir:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho \, dV$$

Aplicando el tma. de la divergencia ($\oint_S \vec{A} \cdot d\vec{s} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \, dV \quad \forall \vec{A}, S, V$):

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) \, dV = \int_V \frac{1}{\varepsilon_0} \rho \, dV$$

Es decir, hemos obtenido:

$$\int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) \, dV = \int_V \frac{1}{\varepsilon_0} \rho \, dV \quad \underline{\underline{\underline{\forall V}}}$$

$$\Updownarrow$$ → Si tomamos un volumen infinitesimal, $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}$ ~~$dV$~~ $= \frac{1}{\varepsilon_0} \rho$ ~~$dV$~~

$$\boxed{\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho}}$$

– Tenemos ya las ecuaciones fundamentales del campo electrostático:

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 &\Leftrightarrow \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho &\Leftrightarrow \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho \, dV \end{aligned}}$$

↓ Nos dan info local sobre $\vec{E}$ (en un punto y un entorno infinitesimal)

↓ Nos dan info global sobre $\vec{E}$ (la suma en varias regiones), NO lo que le pasa a $\vec{E}$ en un punto concreto

# CONDUCTORES

- Supongamos una región del espacio con un campo eléctrico $\vec{E}'$. Ahí, colocamos un material (suponemos $\vec{E}'$ no tan intenso como para extraer las cargas del material), cuyas cargas se verán afectadas por $\vec{E}'$.

- Las cargas internas se moverán hasta alcanzar el estado de mínima energía (⟺ equilibrio estable) [a un tiempo $\Delta t$ que en general es muy corto]. Como resultado, dichas cargas crearán un campo $\vec{E}$ que se sumará al anterior. Dependiendo de cómo sea $\vec{E}$ clasificamos los materiales.

- Así, definimos un conductor como una sustancia que contiene un gran número de portadores de carga que tienen la libertad de moverse por todo el conductor.

- La situación de menor energía, la de equilibrio, requiere que las cargas estén inmóviles ⟺ $\vec{F}=0$ ⟺ $\vec{E}=0$, ya que dichas cargas tienen absoluta libertad para moverse.

- En decir, conductor ⟺ portadores de carga libres ⟺ $\vec{E}_{int}=\vec{0}$ en el equilibrio

$$\Updownarrow \quad \vec{E}=-\vec{\nabla}\phi$$

$\phi =$ cte. en todo el conductor
(incluida la frontera por continuidad de $\phi$)

$$\Downarrow$$

La superficie es una superficie equipotencial

- Aplicando el tma. de Gauss ⟹ $Q_{int}=0$ [dentro del conductor] $\forall$ superficie ⟹ Todas las cargas están en la superficie
[Lo recordamos que es la suma]

$(\vec{E}=0 \Rightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{E}=0 \Rightarrow \rho=0)$

• Por otra parte, como la superficie del conductor es equipotencial: $d\phi = 0$

$$d\phi = \underbrace{\vec{\nabla}\phi}_{-\vec{E}} \cdot d\vec{r} = 0 \Rightarrow \vec{E}\cdot d\vec{r} = 0$$

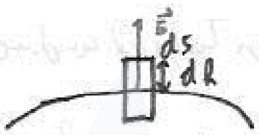
↳ Tgte. a la superficie (el vector que une 2 ptos. de la superficie es, en el límite, tgte.)

$\Downarrow$

$\boxed{\vec{E} \text{ es } \perp \text{ a la superficie}}$

Ahora, $\vec{E}$ no tiene porqué ser 0 ($\phi$ fuera del conductor no tiene porqué ser cte., a priori)

- Calculamos $\vec{E}$ aplicando Gauss a un cilindro infinitesimal:




En el límite: • $dh \to 0 \Rightarrow \vec{E}$ en la tapa será $\vec{E}$ en la superficie del conductor

$\Downarrow$

$\vec{E} \parallel d\vec{s}$ (a la tapa)

• $ds \to 0 \Rightarrow$ Obtendré $\vec{E}$ en un punto de la superficie (además, $\vec{E}$ será cte. en la tapa)

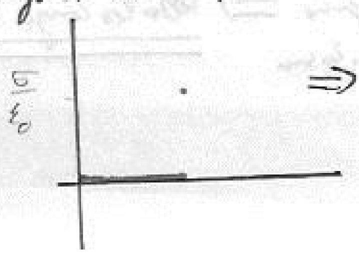
Ahora, el flujo a través del lateral es 0 ($\vec{E}$ va perpendicular a la tapa):

$$\phi = E \cdot ds$$

La carga interior vale $\sigma \cdot ds \Rightarrow E \cdot \cancel{ds} = \dfrac{\sigma \cdot \cancel{ds}}{\varepsilon_0}$

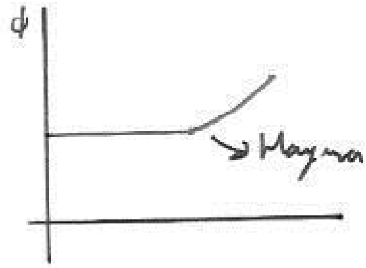
$$\boxed{E(\vec{r}) = \frac{\sigma(\vec{r})}{\varepsilon_0}}$$

Y, si dibujamos $\vec{E}$ con respecto a la distancia al centro del conductor:




$\Rightarrow$ Tenemos una discontinuidad de $\vec{E}$ proporcional a $\sigma$!!!

Nótese que esto no le ocurre a $\phi$:




→ Ninguna discontinuidad en la derivada que provoca la discontinuidad de $\vec{E}$

- <u>$\vec{E}$ en cavidad</u>

. Tomando superficies de Gauss (dibujo en Moodle) $\Rightarrow Q_{int} = 0 \; \forall S$

En el límite, ocurrirá lo mismo $\Rightarrow$ <u>Aunque en la superficie interior haya cargas, su suma 0</u>

. Aplicando $\oint \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$ a curvas con parte en el interior de la cavidad (dibujo en Moodle)

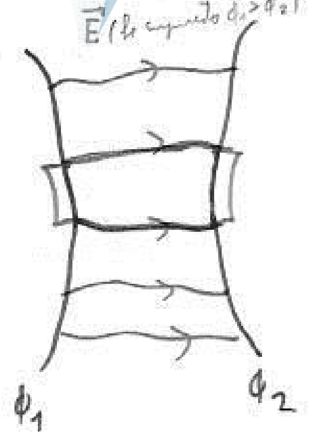
$$\Big\Downarrow \text{(Explicación en Moodle)}$$

$$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0 \quad \forall \text{ trayectoria interior a la cavidad}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\vec{E} = 0 \text{ dentro de la cavidad}}$$

- <u>Dos conductores</u> (dibujaré sólo las superficies)




Tomando una superficie infinitesimal en cada conductor, (metiendo un poco el tubo dentro del volumen) puedo dibujar un <u>cilindro infinitesimal</u> (espesor de cilindro) con las líneas de campo // a la superficie de dicho cilindro (las líneas que nacen en 1 mueren en 2, salvo casos muy extraños)

Aplicando Gauss:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0 \text{ porque } \begin{cases} \vec{E} = 0 \text{ en las bases (interiores al conductor)} \\ \vec{E} \text{ tgte. a la superficie lateral (que, recordemos, es tgte a las líneas de campo)} \end{cases}$$

$$Q_{int} = 0 \Rightarrow \sigma_1 dS_1 + \sigma_2 dS_2 = 0 \Rightarrow \boxed{\sigma_1 dS_1 = -\sigma_2 dS_2}$$

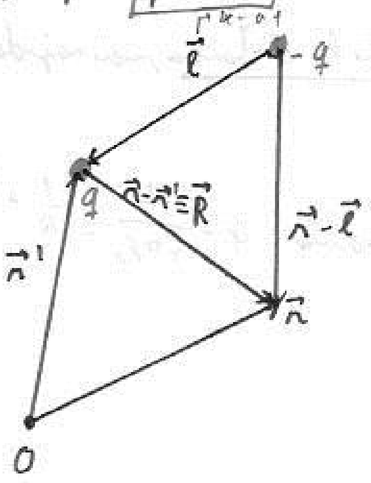
(Teo. de los elementos correspondientes)

# DIPOLO ELÉCTRICO

. Un dipolo es una distribución de dos cargas puntuales, siendo la carga de una la opuesta de la otra

. Queremos $\phi$ y $\vec{E}$ en todo el espacio.

. Definimos el momento dipolar $\boxed{\vec{p} \equiv q\,\vec{\ell}}$ (independiente del S.R.)




$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{|\vec{r}-\vec{r}\,'-\vec{\ell}|} - \frac{q}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right)$$

. Supondremos que $\underline{\ell <<< R}$ (cargas muy próximas o estamos muy lejos):

$$\Rightarrow \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'-\vec{\ell}|} = \frac{1}{|\vec{R}-\vec{\ell}|} = \frac{1}{\sqrt{(\vec{R}-\vec{\ell})\cdot(\vec{R}-\vec{\ell})}} = \frac{1}{\sqrt{R^2+\ell^2-2\vec{R}\cdot\vec{\ell}}} = \frac{1}{R}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\ell}{R}\right)^2-\frac{2\vec{R}\cdot\vec{\ell}}{R^2}}} =$$

$$= \frac{1}{R}\,\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2\vec{R}\cdot\vec{\ell}}{R^2}-\frac{\ell^2}{R^2}\right)}}$$. Ahora aproximamos:

$$\frac{2\vec{R}\cdot\vec{\ell}}{R^2} \simeq \frac{2\ell}{R^2} \text{ (salvo cosenos)}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{2\vec{R}\cdot\vec{\ell}}{R^2} - \frac{\ell^2}{R^2} \simeq \frac{2\vec{R}\cdot\vec{\ell}}{R^2} \rightarrow \text{MUY PEQUEÑO}$$

$\downarrow$

Desarrollamos en serie $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ y como $x$ es pequeño nos quedamos con los 1eros términos

$$\frac{1}{R}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2\vec{R}\cdot\vec{\ell}}{R^2}-\frac{\ell^2}{R^2}\right)}} \simeq \frac{1}{R}\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{2\vec{R}\cdot\vec{\ell}}{R^2}-\frac{\ell^2}{R^2}\right)\right] \simeq$$

$$\simeq \frac{1}{R}\left[1+\frac{\vec{R}\cdot\vec{\ell}}{R^2}\right]$$

· Así, $\phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{|\vec R-\vec \ell|} - \frac{1}{|\vec R|}\right] \simeq \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\cancel{\frac{1}{R}} + \frac{\vec R\cdot\vec\ell}{R^3} - \cancel{\frac{1}{R}}\right] = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\vec R\cdot\vec\ell}{R^3} = \frac{\vec p\cdot\vec R}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$

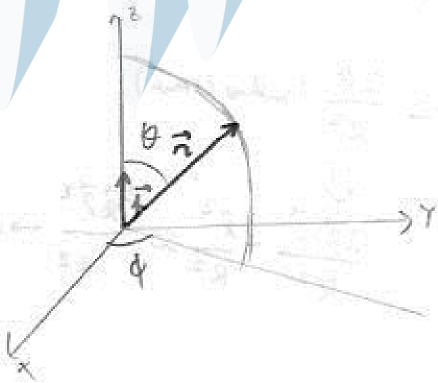
$$\boxed{\phi(\vec R)\simeq \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec p\cdot\vec R}{R^3}}$$

Tenemos un potencial que decrece con el cuadrado de la distancia, más rápido que el de una carga puntual.

· Nótese que si las dos cargas fueran positivas, quedaría: $\phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{R} + \frac{\vec R\cdot\vec\ell}{R^3} + \frac{1}{R}\right] =$

$$= \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{R} + \underbrace{\frac{\vec R\cdot\vec p}{4\pi\varepsilon_0 R^2} + O\left(\frac{\ell^2}{R}\right)}_{\text{Para distancia grande, esto es despreciable y nos queda una carga puntual } 2q}$$

· Vayamos ahora con $\vec E = -\vec\nabla\phi = -\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\hat u_x + \frac{\partial\phi}{\partial y}\hat u_y + \frac{\partial\phi}{\partial z}\hat u_z\right)$. Ahora, estas derivadas son complicadas. Estudiamos primero un caso simple: origen en el dipolo, orientado según el eje Z:




(En realidad, estamos tomando $\vec R-\vec\ell$ en vez de $\vec R$, pero es que $\vec\ell$ es muy pequeño y despreciable)

$$\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec p\cdot\vec r}{r^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\cancel{r}\cos\theta}{r^{\cancel{3}2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\cos\theta}{r^2}$$

Y en coordenadas esféricas, el gradiente es:

$$\vec E = -\vec\nabla\phi = \left(-\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)\hat u_r + \left(-\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)\hat u_\theta + \left(-\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)\hat u_\phi =$$

$$= \boxed{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{2p\cos\theta}{r^3}\hat u_r + \frac{p\sin\theta}{r^3}\hat u_\theta\right) = \vec E}$$

· En cualquier otro S.R. (con el dipolo en el origen)

$$\boxed{\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{3\vec{r}\cdot\vec{p}}{r^5}\,\vec{r} - \frac{1}{r^3}\,\vec{p}\right]}$$

## DIPOLO EN $\vec{E}$ EXTERNO

· Sea un dipolo en un campo $\vec{E}_{ext}$ que crea un potencial $\phi_{ext}$. Ahí, su energía potencial vale:

$$U = -q\,\phi_{ext}(\vec{r}) + q\,\phi_{ext}(\vec{r}+\vec{l})$$

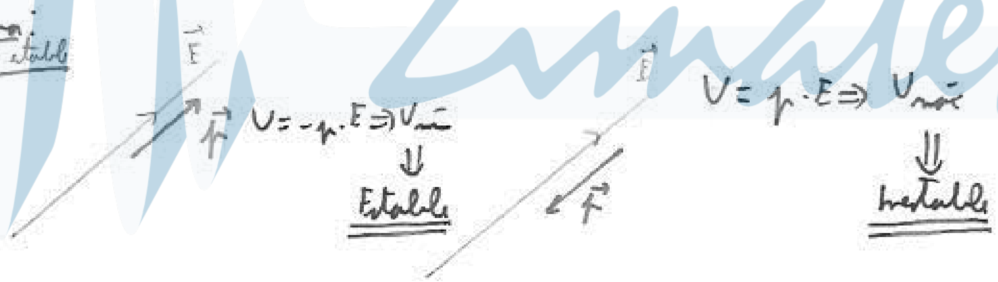
que sería 0 si $\phi_{ext}(\vec{r}) = \phi_{ext}(\vec{r}+\vec{l})$

Ahora, desarrollamos $\phi_{ext}(\vec{r}+\vec{l})$ en serie de Taylor alrededor de $\vec{r}$ (como $l <<<$, despreciamos términos cuadráticos):

$$U \approx -q\,\phi_{ext}(\vec{r}) + q\left[\phi_{ext}(\vec{r}) + \vec{\nabla}\phi_{ext}\cdot\vec{l}\right] = q\,\vec{\nabla}\phi_{ext}\cdot\vec{l} = \boxed{-\vec{p}\cdot\vec{E}_{ext}(\vec{r}) = U}$$

· Y si el dipolo puede girar, se orientará de modo que la energía potencial sea

(máxima o) mínima. (eq. inestable / eq. estable)




· Y respecto a la fuerza:

$$F_x = -q\,E_{ext_x}(\vec{r}) + q\,E_{ext_x}(\vec{r}+\vec{l}) \approx -q\,E_{ext_x}(\vec{r}) + q\left[E_{ext_x}(\vec{r}) + \vec{\nabla}E_{ext_x}\cdot\vec{l}\right] =$$

$$= q\,\vec{\nabla}E_{ext_x}\cdot\vec{l} = p_x\frac{\partial E_{ext_x}}{\partial x} + p_y\frac{\partial E_{ext_y}}{\partial y} + p_z\frac{\partial E_{ext_z}}{\partial z}$$

Haciendo lo mismo con cada componente: $\to \vec{F} = p_x\frac{\partial}{\partial x}(E_{ext_x}\hat{x} + E_{ext_y}\hat{y} + E_{ext_z}\hat{z}) + \dots$

$$\boxed{\vec{F} = (\vec{p}\cdot\vec{\nabla})\,\vec{E}_{ext}}$$

Y con el momento (en un modelo):

$$\boxed{\vec{M} = \vec{r}\times\vec{F} + \vec{p}\times\vec{E}_{ext}(\vec{r}+\vec{l})}$$

# DESARROLLO MULTIPOLAR

· Sea una distribución arbitraria de carga encerrada en una esfera de radio $r_{máx}$. Queremos $\phi$ y $\vec{E}$ en $r >> r_{máx}$. Esto nos permitirá, conocido $\vec{E}$ muy lejos de la distribución de cargas obtener dicha distribución.

(Dibujo en Moodle)

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho(\vec{r}\,')}{R}\,dv'$$

$R = \sqrt{r^2+r'^2-2\vec{r}\cdot\vec{r}\,'}$. Desarrollando en serie de Taylor:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\sqrt{r^2+r'^2-2\vec{r}\cdot\vec{r}\,'}} = \frac{1}{r}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{r'^2}{r^2}-\frac{2\vec{r}\cdot\vec{r}\,'}{r^2}\right)}}$$

Así, desarrollando y despreciando $\left(\frac{r'}{r}\right)^3$ y potencias superiores (Moodle) queda:

$$\frac{1}{R} \simeq \frac{1}{r}\left[1+\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}\,'}{r^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{3(\vec{r}\cdot\vec{r}\,')^2}{r^4}-\frac{r'^2}{r^2}\right)\right]+\dots$$

· Haciendo integral de suma = suma de integrales:

$$\phi(\vec{r}) \simeq \underset{\text{orden 0 en } \frac{r'}{r}}{\phi_0(\vec{r})} + \underset{\text{orden 1 en } \frac{r'}{r}}{\phi_1(\vec{r})} + \underset{\text{orden 2 en } \frac{r'}{r}}{\phi_2(\vec{r})} + \dots$$

Con

$$\phi_0(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r}\overbrace{\int_V \rho(\vec{r}\,')dV'}^{q}$$ → Va como $\frac{1}{r}$ → Término monopolar (= carga puntual)

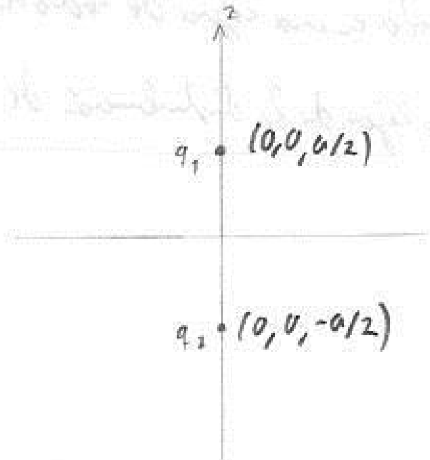
$$\phi_1(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r^3}\vec{r}\overbrace{\int_V \vec{r}\,'\rho(\vec{r}\,')dV'}^{\text{Lo llamamos } \vec{p} \text{ (ampliando la def de momento dipolar)}}$$ → Va como $\frac{1}{r^2}$ → Término dipolar (va como un dipolo)

$$\phi_2(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{1}{2}\left[\frac{3(\vec{r}\cdot\vec{r}\,')^2}{r^5}-\frac{r'^2}{r^3}\right]$$ → Va como $\frac{1}{r^3}$ → Término cuadrupolar

Nota: Hemos ampliado la def. de $\vec{p} \equiv \int_V \vec{r}\,'\rho(\vec{r}\,')dV$; a part. puntuales $\sum_i \vec{r}_i q_i$

misma integral que para momento de inercia

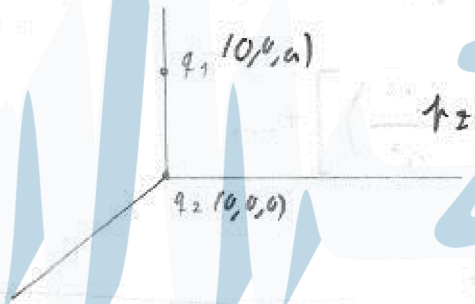
P.ej., supongamos dos cargas:




$$\vec{p} = \vec{r}_1 q_1 + \vec{r}_2 q_2$$

$$p_z = \frac{a}{2} q_1 - \frac{a}{2} q_2 = \begin{cases} 0 & \text{si } q_1 = q_2 \\ aq & \text{si } q_1 = -q_2 = q \end{cases} \quad \text{(como ya sabíamos)}$$

Y si movemos el S.R.:




$p_z = a q_1 \Rightarrow$ En general, $\vec{p}$ depende del S.R.

(En este caso, no cambia si $q_1 = -q_2$)

• En lo que se refiere al momento cuadrupolar, me gustaría sacar $\vec{r}$ fuera de la integral (integral que sólo depende del objeto):

Notación: $x_i = \begin{cases} x & \text{si } i=1 \\ y & \text{si } i=2 \\ z & \text{si } i=3 \end{cases}$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{3(\vec{r}\cdot\vec{r}')^2}{r^5} - \frac{r'^2}{r^3}\right] = \frac{1}{2r^5}\left[3\left(\sum_{i=1}^{3} x_i x_i'\right)\left(\sum_{j=1}^{3} x_j x_j'\right) - \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{3} x_i x_i\right)}_{r^2=\vec{r}\cdot\vec{r}} r'^2\right] =$$

$$= \frac{1}{2r^5}\left[3\sum_{i,j} x_i x_j x_i' x_j' - r'^2 \sum_{i,j} x_i x_j \delta_{ij}\right] = \frac{1}{2r^5}\sum_{i,j} x_i x_j \left(3x_i' x_j' - \delta_{ij} r'^2\right)$$

↳ Escribo $\sum_i x_i x_i$ de esta manera

(Recordemos que $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i\neq j \end{cases}$)

Ya tengo separados $\vec{r}$ y $\vec{r}'$!!!

Sustituyendo:

$$\boxed{\phi_2(\vec r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i,j}\frac{1}{2}\frac{x_i x_j}{r^5}\, Q_{ij}}$$

Con $Q_{ij}$ una matriz que cumple:

$$\boxed{Q_{ij} = \int_V (3x'_i x'_j - \delta_{ij} r'^2)\,\rho(\vec r')\,dV'}$$

$Q_{ij}$ cumple:

$$Q_{ji} = \int_V (3x'_j x'_i - \delta_{ji} r'^2)\,\rho(\vec r')\,dV \underset{\delta \text{ simétrica}}{=} \int_V (3x'_i x'_j - \delta_{ij} r'^2)\,\rho(\vec r')\,dV = Q_{ij}$$

- Es simétrica ($Q_{ij} = Q_{ji}$)
- Su traza ($Q_{xx} + Q_{yy} + Q_{zz}$) vale 0

$$Q_{xx}+Q_{yy}+Q_{zz} = \int_V (3x'^2 - r'^2)\rho(\vec r')dV' + \int_V (3y'^2 - r'^2)\rho(\vec r')dV' + \int_V (3z'^2 - r'^2)\rho(\vec r')dV' =$$

$$= \int_V (3x'^2 - r'^2 + 3y'^2 - r'^2 + 3z'^2 - r'^2)\rho(\vec r')dV' = \int_V \underbrace{\big(3\underbrace{(x'^2+y'^2+z'^2)}_{r'} - 3r'^2\big)}_{0}\rho(\vec r')dV' = 0$$

• Pero, ¿qué ocurre al cambiar de S.R.?. Cambiamos a un origen de coordenadas O' (denotaré los vectores ahí por $\vec r''$):

Dibujo en Moodle

$$\vec p\,' = \int_V \vec r''\rho\, dV' = \int_V (\vec r' + \vec{O'O})\rho\, dV' = \underbrace{\int_V \vec r\rho\, dV'}_{\vec p} + \vec{O'O}\underbrace{\int_V \rho\, dV'}_{Q}$$

$$\boxed{\vec p\,' = \vec p + \vec{O'O}\,Q}$$

Así, $\boxed{\vec p\,' = \vec p \Leftrightarrow Q = 0}$

- Se demuestra que, si la carga total y el momento dipolar son 0, el momento cuadrupolar no depende de la elección de origen de coordenadas.

# ECUACIONES DE CAMPO

- Las ecuaciones que me definen el campo electrostático son:

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{E} &= 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \end{aligned}}$$

- Ahora, $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \Rightarrow \exists$ función escalar $\phi$ tq $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$. Llevándolo a la segunda ecuación:

$$\vec{\nabla} \cdot (-\vec{\nabla}\phi) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}} \quad \left( \text{En coor. cart.} \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \right)$$

. Así:

Si en un punto hay carga: $\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$ Ec. de Poisson

" " " no " " : $\nabla^2 \phi = 0$ Ec. de Laplace

. Esta ecuación diferencial tiene solución única dentro de una superficie cerrada cuando se dan las condiciones de contorno: $\phi$ a toda la superficie.
↳ Condiciones de Dirichlet

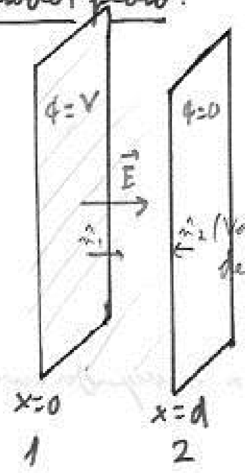
. Si en la superficie doy $\frac{d\phi}{ds}$ en la dirección perpendicular a la superficie (la componente normal del campo eléctrico),
↳ Condiciones de Neumann

tb. $\exists!$ solución.

(En los problemas que hacemos con distribuciones finitas, estamos suponiendo $\left\{ \begin{array}{l} \text{llevar la superficie al } \infty \\ \phi_\infty = 0 \end{array} \right.$ )

# EJEMPLOS DE APLICACIÓN

• Condensador plano:




Dos planos conductores infinitos (es decir, $d <<< \sqrt{A}$)

$\Downarrow$

V cte. en todo el plano → ya tengo las cond. de contorno

$\hat{n}_2$ (Vector normal del conductor)

Resolvemos la ec. de Laplace entre los dos planos (p.q. $\rho = 0$)

$\Downarrow$

Suponemos que el plano tiene volumen, pero lo único cargado es lo delgado

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \underbrace{\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}}_{0} + \underbrace{\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}}_{0} = 0$$

por todo z, y, el problema es el mismo

$\Downarrow$

$\phi = \phi(x)$

$\Downarrow$ Tengo una EDO

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = 0$$

(...)

$$\phi(x) = C_1 + C_2 \cdot x$$

$C_1$ y $C_2$ se obtienen imponiendo las cond. de contorno $\begin{cases} \phi(d) = 0 \\ \phi(0) = V \end{cases}$

$$\boxed{\phi(x) = V\left[1 - \frac{x}{d}\right]}$$

Y derivando: $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{V}{d}\hat{n}_x}$

Y como en un conductor $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{n}$, puedo obtener $\sigma$ de las chapas!!

$$\boxed{\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{\varepsilon_0 V}{d} \\ \sigma_2 &= \frac{-\varepsilon_0 V}{d} = -\sigma_1 \end{aligned}}$$

$\hat{n}_2 = -\hat{n}_1$ (MUCHO OJO!!!)

· Dos esferas conductoras:


Por la simetría del problema, $\phi=\phi(r)$

$$\Downarrow$$

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\phi}{dr}\right) \underset{\substack{\text{Entre}\\ \text{esferas, } \rho=0}}{=} 0$$

$$\Downarrow$$

$$r^2\frac{d\phi}{dr} = C_1$$

$$\Downarrow$$

$$\phi(r) = -\frac{C_1}{r} + C_2$$

Y con las cond. de contorno:

$$\boxed{\phi(r) = \frac{b\cdot V}{a-b}\left(\frac{a}{r}-1\right)}$$

Y haciendo el gradiente:

$$\boxed{\vec{E}(r) = \frac{bV}{a-b}\,\frac{a}{r^2}\,\hat{u}_r}$$

Y de la misma manera:

$$\sigma_b = \varepsilon_0 E(b) = \boxed{\frac{a}{b}\,\frac{V}{a-b}\cdot\varepsilon_0 = \sigma_b}$$

$$\sigma_a = \underset{\hat{n}_2=-\hat{n}_1}{-}\varepsilon_0 E(a) = \boxed{-\frac{b}{a}\,\frac{V}{a-b}\,\varepsilon_0 = \sigma_a}$$

(Usando Gauss (a Moodle) da lo mismo)

Dos cilindros conductores

Hecho en Moodle

# SISTEMAS DE CONDUCTORES

· Ya que los conductores son superficies equipotenciales, veamos si nos pueden ayudar a ser las condiciones de contorno de la ec. de Laplace.

· Quiero: – Carga en cada conductor
  – Resolver la ecuación de Laplace fuera de los conductores (dentro ya lo sabemos) $\phi$ cte.

· Supondré 3 conductores (fácilmente generalizable a n).

· Nos basamos a:

① $\nabla^2\phi = 0 \Rightarrow$ Resoluble en principio (aunque difícil) $\Rightarrow$ Sacamos $\vec{E} \Rightarrow$ Sacamos $\sigma$ (como pone en ②)

$\Rightarrow$ **LINEAL**

② $\sigma_i = \varepsilon_0 E_{n_i}$ ; $\left(Q_i = \int_{S_i} \varepsilon_0 E_{n_i} \, ds_i\right)$

– Ya que el problema de arriba no lo sé resolver, me plantearé otros tres problemas:

1– $\phi_1 = \phi_1$; $\phi_2 = 0$; $\phi_3 = 0$. Sea $\phi^{(1)}$ la solución, con $Q_1^{(1)}$, $Q_2^{(1)}$, $Q_3^{(1)}$

2– $\phi_1 = 0$; $\phi_2 = \phi_2$; $\phi_3 = 0$. Sea $\phi^{(2)}$ la solución, con $Q_1^{(2)}$, $Q_2^{(2)}$, $Q_3^{(2)}$

3– $\phi_1 = 0$; $\phi_2 = 0$; $\phi_3 = \phi_3$. Sea $\phi^{(3)}$ la solución, con $Q_1^{(3)}$, $Q_2^{(3)}$, $Q_3^{(3)}$

Ahora, como la ecuación de Laplace es lineal, $\phi^{(1)} + \phi^{(2)} + \phi^{(3)} = \phi$ es tb. solución. Además, $\phi$ cumple las condiciones de contorno $\xrightarrow[\text{unicidad de solución}]{}$ $\phi$ será solución de nuestro problema!!

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi = -\left(\vec{\nabla}\phi^{(1)} + \vec{\nabla}\phi^{(2)} + \vec{\nabla}\phi^{(3)}\right) = \vec{E}^{(1)} + \vec{E}^{(2)} + \vec{E}^{(3)}$$

$\llcorner$ $\nabla$ es lineal

Y como $Q \propto \vec{E} \Longrightarrow$

$$Q_1 = Q_1^{(1)} + Q_1^{(2)} + Q_1^{(3)}$$
$$Q_2 = Q_2^{(1)} + Q_2^{(2)} + Q_2^{(3)}$$
$$Q_3 = Q_3^{(1)} + Q_3^{(2)} + Q_3^{(3)}$$

$Q_i = \int_{S_i} \varepsilon_0 E_{n_i} \, ds_i = \int_{S_i} \varepsilon_0 \left(E_{n_i}^{(1)} + E_{n_i}^{(2)} + E_{n_i}^{(3)}\right) ds_i =$

Los vectores $E_{n_i}$ son paralelos $\Rightarrow$ Módulo de suma = suma de módulos

$= \underbrace{\int_{S_i} \varepsilon_0 E_{n_i}^{(1)} ds_i}_{Q_i^{(1)}} + \underbrace{\int_{S_i} \varepsilon_0 E_{n_i}^{(2)} ds_i}_{Q_i^{(2)}} + \underbrace{\int_{S_i} \varepsilon_0 E_{n_i}^{(3)} ds_i}_{Q_i^{(3)}}$

Vayamos ahora al <u>primer problema</u>.

Hacemos $\phi_1^{(1)} \to \lambda\phi_1^{(1)}$. Así, $\lambda\phi^{(1)}$ es sol (la ec. es lineal Laplace) y cumple cond. contorno $\Rightarrow \phi^{(1)} \to \lambda\phi^{(1)}$

. Haciendo la modificación $\phi_i^{(1)} \to \lambda\phi_i^{(1)}$, se tiene (Da lineal): $\vec{E}^{(1)} \longrightarrow \lambda\vec{E}^{(1)}$

Y como $\int \varepsilon_0 \lambda E\, ds = \lambda \int \varepsilon_0 E\, ds \Longrightarrow Q_1^{(1)} \to \lambda Q_1^{(1)}$

$$Q_2^{(1)} \to \lambda Q_2^{(1)}$$

$$Q_3^{(1)} \to \lambda Q_3^{(1)}$$

Es una op. lineal de IR a IR

(La linealidad es lo más importante destacado (*))

. Es decir, reescalando $\phi_1^{(1)} \to \lambda\phi_1^{(1)} \Longrightarrow Q_i^{(1)} \propto \phi_i^{(1)} \quad \forall i$

todas las cargas se reescalan $Q_i^{(1)} \to \lambda Q_i^{(1)}$

Pq. $Q_i^{(1)}$ es f(ón) de $\phi_i^{(1)} \Rightarrow$ Dadas las cond. de contorno, la geometría del problema se determina unívocamente $\phi^{(1)} \Rightarrow$ Nos determina unívocamente $\vec{E}^{(1)} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Nos determina unívocamente $Q_i^{(1)}$

. Aplicándolo al resto de problemas tb.:

$$Q_1^{(1)} = C_{11} \cdot \phi_1^{(1)} \quad ; \quad Q_2^{(1)} = C_{21}\phi_2^{(1)} \quad ; \quad Q_3^{(1)} = C_{31}\phi_3^{(1)}$$

$$Q_1^{(2)} = C_{12}\phi_1^{(2)} \quad ; \quad Q_2^{(2)} = C_{22}\phi_2^{(2)} \quad ; \quad Q_3^{(2)} = C_{32}\phi_3^{(2)}$$

$$Q_1^{(3)} = C_{13}\phi_1^{(3)} \quad ; \quad Q_2^{(3)} = C_{23}\phi_2^{(3)} \quad ; \quad Q_3^{(3)} = C_{33}\phi_3^{(3)}$$

Ahora, al cambiar la geometría de los conductores manteniendo las cond. de contorno ($\phi_1$), la solución debe cambiar $\Longrightarrow C_{ij}$ depende de la geometría de los conductores (forma, distancia...)

contorno

. Matricialmente:

$$Q_1 = C_{11}\phi_1 + C_{12}\phi_2 + C_{13}\phi_3$$

$$Q_2 = C_{21}\phi_1 + C_{22}\phi_2 + C_{23}\phi_3$$

$$Q_3 = C_{31}\phi_1 + C_{32}\phi_2 + C_{33}\phi_3$$

En general, $Q_i = \sum_{j=1}^{n} C_{ij}\phi_j$

Coeficiente de influencia

Esta matriz cumple:

$C_{ii} > 0 \Longrightarrow$ Traza $> 0$

$C_{ij} = C_{ji}$ (matriz simétrica)

$C_{ij} < 0$

$C_{ii} \geq \sum_j |C_{ij}|$

Es invertible

Invirtiendo la matriz:

$$\phi_i = \sum_{j=1}^{n} P_{ij} \, q_j$$

coeficiente de potencial

## CONDENSADOR

· Son dos conductores que pueden almacenar cargas iguales y opuestas. Aplicando lo visto ahora:

$$\phi_1 = P_{11} Q_1 + P_{12} Q_2 \underset{Q_2 = -Q_1}{=} (P_{11} - P_{12}) Q$$

$$\phi_2 = P_{21} Q_1 + P_{22} Q_2 = (P_{21} - P_{22}) Q$$

$$\Delta\phi = \phi_1 - \phi_2 = (P_{11} + P_{22} - 2P_{12}) Q \underset{P_{11}+P_{22}-2P_{12} \equiv \frac{1}{C}}{=} \boxed{\frac{Q}{C} = \Delta\phi}$$

$\neq 0$ pq. Pe[illegible] ([illegible] a Q)

Así, definimos la capacidad de un condensador:

$$\boxed{C \equiv \frac{1}{P_{11} + P_{22} - 2P_{12}}}$$

que sólo dependerá de magnitudes geométricas del condensador