Cálculo vectorial

· Un par de operaciones útiles con 3 vectores:

$$\boxed{\text{Triple producto: } \vec a\cdot(\vec b\times\vec c)=\vec b\cdot(\vec c\times\vec a)=\vec c\cdot(\vec a\times\vec b)\in\mathbb{R}}$$ (volumen del paralelepípedo definido por $\vec a$, $\vec b$ y $\vec c$)

$$\boxed{\text{Triple producto vectorial: } \vec a\times(\vec b\times\vec c)=\vec b\times(\vec a\cdot\vec c)-\vec c\times(\vec a\cdot\vec b)\in V}$$

· Importante: como la existencia de vectores no depende del S.R., en las ecuaciones vectoriales no aparecen las componentes (cambian con el S.R.). Ahora, trabajamos con componentes por comodidad. Con componentes, p. ej., el triple producto queda:

$$\vec a\cdot(\vec b\times\vec c)=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

· Se pueden diferenciar:

Sea $\vec A=\vec A(u)$. Así, $$\boxed{\frac{d\vec A}{du}\overset{def}{=}\lim_{\delta u\to 0}\frac{\vec A(u+\delta u)-\vec A(u)}{\delta u}\in V}$$

· Que verifica:

- $$\boxed{\frac{d}{du}(\vec A+\vec B)=\frac{d\vec A}{du}+\frac{d\vec B}{du}}$$
- $$\boxed{\frac{d}{du}\underbrace{(\vec A\cdot\vec B)}_{\mathbb{R}\text{, es una función normal y corriente}}=\frac{d\vec A}{du}\cdot\vec B+\vec A\cdot\frac{d\vec B}{du}}$$
- $$\boxed{\frac{d}{du}\underbrace{(\vec A\times\vec B)}_{V}=\frac{d\vec A}{du}\times\vec B+\vec A\times\frac{d\vec B}{du}}$$
- $$\boxed{\frac{d}{du}\underbrace{[\underset{\mathbb{R}}{f(u)}\cdot\vec A]}_{V}=f(u)\frac{d\vec A}{du}+\vec A\frac{df}{du}}$$

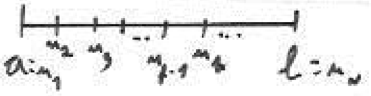
· En componentes ($\vec A=A_x\hat u_x+A_y\hat u_y+A_z\hat u_z$): $$\boxed{\frac{d\vec A}{du}=\frac{dA_x}{du}\hat u_x+\frac{dA_y}{du}\hat u_y+\frac{dA_z}{du}\hat u_z}$$

$\hat u_x$, $\hat u_y$ y $\hat u_z$ ctes.

• Se pueden integrar. Definimos mediante una suma de Rieman (dibujo en Moodle):

$$\boxed{\int_a^b \vec{A}(u)\,du = \lim_{\delta u_k \to 0} \sum_{k=1}^{N} \underbrace{\vec{A}(u_k)\,\delta u_k}_{\text{El módulo de esto es un infinitesimo, pq. } \delta u_k \to 0} \in V}$$

lo que hago es dividir el intervalo $[a,b]$ en $a=u_1, u_2, \dots, u_{N-1}, u_N = b$:



Defino $\delta u_k = u_k - u_{k-1}$, definido $\forall k$. Al ser un intervalo pequeño (tomaremos límite), suponemos $\vec{A}$ cte. en el intervalo $= \vec{A}_{k}$. Si $N\to\infty$, $\delta u_k \to 0$ y tenemos la definición.

las diferencias se van al tomar límite, se hacen muy pequeñas

En componentes ($\hat{u}_x, \hat{u}_y, \hat{u}_z$ ctes.)

$$\boxed{\int \vec{A}(u)\,du = \left[\int A_x(u)\,du\right]\hat{u}_x + \left[\int A_y(u)\,du\right]\hat{u}_y + \left[\int A_z(u)\,du\right]\hat{u}_z}$$

. Estudiemos ahora funciones que a cada punto del espacio le asocian algo:

$f(P) \Leftrightarrow \quad f: P \longrightarrow \mathbb{R}$ Campo escalar

Y fijando un S.R. ($P \to (x,y,z)$) queda $\quad f: \begin{array}{l}\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y,z) \longrightarrow f(x,y,z)\end{array}$

Pero como f se aplica a puntos ($\exists$ independientemente del S.R.): $\quad f: \begin{array}{l}\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x',y',z') \longrightarrow f(x',y',z')\end{array}$

En lugar de asociar un número, a cada punto se le puede asociar un vector:

$f: P \longrightarrow V \qquad$ Campo vectorial

$(x,y,z) \longrightarrow \overrightarrow{f(x,y,z)}$

Fijando un S R: $\quad f: \begin{array}{l}\mathbb{R}^3 \longrightarrow V \\ (x,y,z) \longrightarrow f_x(x,y,z)\,\hat{u}_x + f_y(x,y,z)\,\hat{u}_y + f_z(x,y,z)\,\hat{u}_z\end{array}$ Tres funciones escalares

Aquí, al cambiar de S.R., cambian tanto las coordenadas como los unitarios:

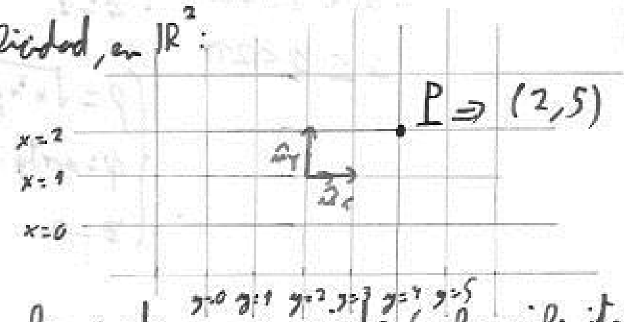
$$(x,y,z) \longrightarrow f_x(x',y',z')\hat{u}'_x + f_y(x',y',z')\hat{u}'_y + f_z(x',y',z')\hat{u}'_z$$

ecuación de una curva

Se representan mediante líneas de campo $\vec{r}(\lambda)$ tgtes. al campo. Si el campo es $\vec{A}$: $\boxed{\dfrac{d\vec{r}}{d\lambda} = \vec{A}(\vec{r})}$ En fluidos, las líneas del campo $\vec{v}$ son las trayectorias de partículas de fluido

• Estudiemos más a fondo los S.R.: → No confundir con cambio de SR de mecánica, el traslado lo ejes, aquí digo otros ejes.

· Empecemos, por simplicidad, en $\mathbb{R}^2$:



⇒ Coordenadas cartesianas

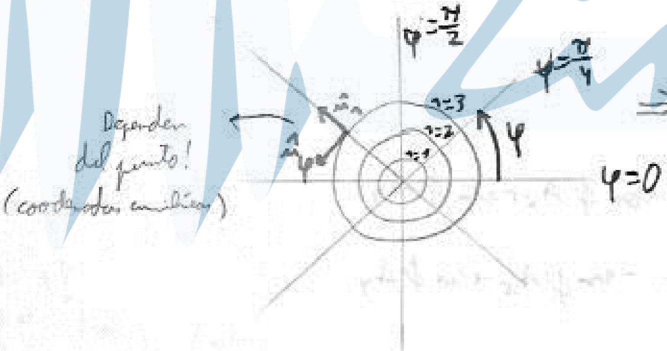
- Voy a llenar el plano de un enrejado (caben infinitas rectas, aunque sólo dibuje algunas)

- Etiqueto cada recta (la etiquetación debe ser única)

- Las coordenadas son determinadas por las etiquetas de las rectas que se cortan

- Los vectores unitarios se determinan por ser tgtes a las rectas de la rejilla (y valor 1), en sentido creciente del etiquetado

• Pero el enrejado tb. se puede hacer circular:



⇒ Coordenadas polares

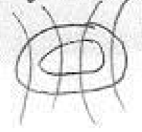
- El etiquetado sirve, pues nos permite determinar los puntos unívocamente (salvo el origen, que da problemas)

↳ r: distancia al origen $(0 < r < \infty)$ $\qquad x = r\cos\varphi$

↳ φ: ángulo respecto a la recta origen $\qquad y = r\,\text{sen}\,\varphi$

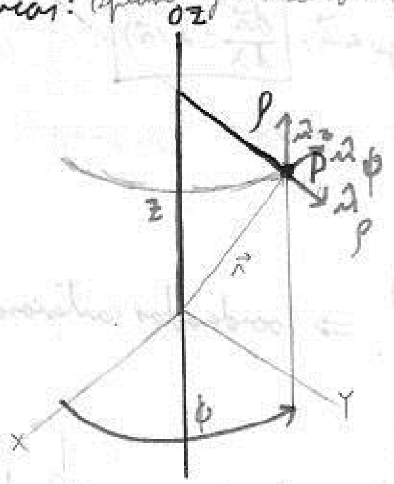
- Los vectores de la base se definen igual: me sitúo en un punto y son tgtes. a la rejilla (sentido creciente). En este caso, resultan ser ortogonales (al ser // al radio y tgte. a la circunferencia). Esto conviene, aunque no es imprescindible

• Hay infinitos S.R., podemos coger las curvas que queramos (siempre que las etiquetas sean únicas):



Vamos ahora a $\underline{\underline{\mathbb{R}^3}}$: (aquí, en lugar de curvas elegimos superficies que eligen vectores)

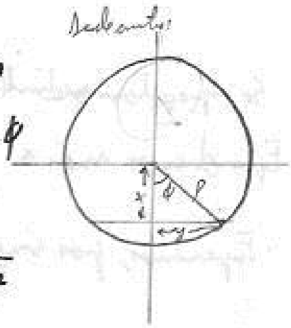
Cilíndricas: (2 planos y un cilindro $\Leftrightarrow$ rejilla)



$$0 < \rho < +\infty$$
$$-\infty < z < +\infty$$
$$0 \leq \phi < 2\pi$$

$$\begin{cases} x = \rho\cos\phi \\ y = \rho \operatorname{sen}\phi \\ z = z \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2} \\ \phi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} \\ z = z \end{cases}$$



OX y OZ están para relacionar con coor. cart., no forman parte de ninguna superficie

Obtendremos los vectores como siempre: tgte a las superficies, sentido creciente del la coordenada.
Aquí, de nuevo, son ortogonales y dependen del punto. Por geometría:

$$\begin{cases} \hat{u}_\rho = \cos\phi\,\hat{u}_x + \operatorname{sen}\phi\,\hat{u}_y \\ \hat{u}_\phi = -\operatorname{sen}\phi\,\hat{u}_x + \cos\phi\,\hat{u}_y \\ \hat{u}_z = \hat{u}_z \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hat{u}_x = \cos\phi\,\hat{u}_\rho - \operatorname{sen}\phi\,\hat{u}_\phi \\ \hat{u}_y = \operatorname{sen}\phi\,\hat{u}_\rho + \cos\phi\,\hat{u}_\phi \\ \hat{u}_z = \hat{u}_z \end{cases}$$

Y un vector cualquiera:

$$A_\rho = \vec{A}\cdot\hat{u}_\rho = \cos\phi\,A_x + \operatorname{sen}\phi\,A_y$$
$$A_\phi = \vec{A}\cdot\hat{u}_\phi = -\operatorname{sen}\phi\,A_x + \cos\phi\,A_y$$
$$A_z = \vec{A}\cdot\hat{u}_z = A_z$$

$$\left(\begin{pmatrix} A_\rho \\ A_\phi \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & \operatorname{sen}\phi & 0 \\ -\operatorname{sen}\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}\right)$$

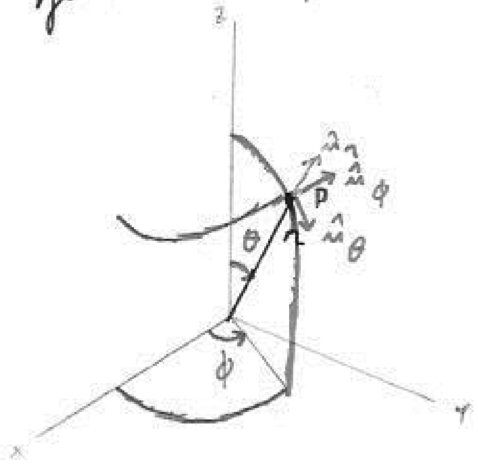
$$\Updownarrow\; P^{-1} = P^T$$

$$\left(\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\operatorname{sen}\phi & 0 \\ \operatorname{sen}\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_\rho \\ A_\phi \\ A_z \end{pmatrix}\right)$$

En general un campo:

$$\vec{A} = A_x(x,y,z)\hat{u}_x + A_y(x,y,z)\hat{u}_y + \ldots = A_\rho(\rho,\phi,z)\,\hat{u}_\rho + A_\phi(\rho,\phi,z)\,\hat{u}_\phi +$$
$$+ A_z(\rho,\phi,z)\,\hat{u}_z$$

Esféricas: (2 planos y una esfera)



$$0 < r < +\infty$$
$$0 \leq \theta \leq \pi$$
$$0 \leq \phi < 2\pi$$

$$\begin{cases} x = r \operatorname{sen}\theta \cos\phi \\ y = r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \phi = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} \\ \theta = \operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} \end{cases}$$

De nuevo, ejes OX, OY, OZ están para ilustrar, no son parte de ninguna superficie

Los vectores se obtienen como siempre. Además, por geometría, resultan ser ortogonales (aunque dependan del punto). Veamos ahora cómo se transforma un vector cualquiera:

El proceso es igual que en cilíndricas: se obtiene la matriz y se multiplica escalarmente

$$A_r = \operatorname{sen}\theta\cos\phi\, A_x + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi\, A_y + \cos\theta\, A_z$$
$$A_\theta = \cos\theta\cos\phi\, A_x + \cos\theta\operatorname{sen}\phi\, A_y - \operatorname{sen}\theta\, A_z$$
$$A_\phi = -\operatorname{sen}\phi\, A_x + \cos\phi\, A_y$$

$$\left(\begin{pmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{sen}\theta\cos\phi & \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\phi & \cos\theta\operatorname{sen}\phi & -\operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\phi & \cos\theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \right)$$

$$A^{-1} = A^T$$

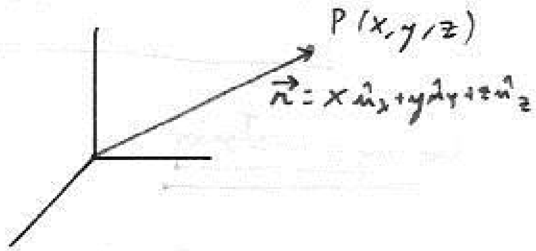
$$A_x = \operatorname{sen}\theta\cos\phi\, A_r + \cos\theta\cos\phi\, A_\theta - \operatorname{sen}\theta\, A_\phi$$
$$A_y = \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi\, A_r + \cos\theta\operatorname{sen}\phi\, A_\theta + \cos\phi\, A_\phi$$
$$A_z = \cos\phi\, A_r - \operatorname{sen}\theta\, A_\theta$$

$$\left(\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{sen}\theta\cos\phi & \cos\theta\cos\phi & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi & \cos\theta\operatorname{sen}\phi & \cos\phi \\ \cos\phi & -\operatorname{sen}\theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\phi \end{pmatrix} \right)$$

GRADIENTE

· Sea f un campo escalar $f(P)$

· Al elegir un S.R., el campo queda $f(x,y,z)$



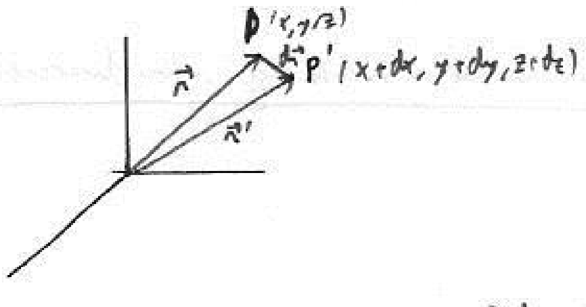
· En 1 dimensión la derivada nos dice como cambia la función cerca de P:

$$df = \underbrace{f(x+dx)}_{f(P')} - \underbrace{f(x)}_{f(P)} = \left(\frac{df}{dx}\right)_{P \to \text{en } P} dx$$

· El problema es que en $\mathbb{R}^3$ f varía al variar cualquiera de las coordenadas: me puedo mover en cualquier dirección:

$$df = f(P') - f(P) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_P dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_P dy + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_P dz$$

$$\text{Con} \begin{cases} P = (x,y,z) \\ P' = (x+dx, y+dy, z+dz) \end{cases}$$



Así: $\vec{r} = x\hat{u}_x + y\hat{u}_y + z\hat{u}_z$

$\vec{r}' = (x+dx)\hat{u}_x + (y+dy)\hat{u}_y + (z+dz)\hat{u}_z$

$\Downarrow$

$d\vec{r} = dx\,\hat{u}_x + dy\,\hat{u}_y + dz\,\hat{u}_z$

Y como $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$, lo podemos ver como un producto escalar:

$$df = \underbrace{\left[\frac{\partial f}{\partial x}\hat{u}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{u}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{u}_z\right]}_{\equiv\, \vec{\nabla} f} \cdot d\vec{r}$$

$\vec{\nabla} f$, denominado gradiente

Así que definimos el gradiente:

$$\boxed{\text{grad}\,\phi = \vec{\nabla}\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x}\hat{u}_x + \frac{\partial \phi}{\partial y}\hat{u}_y + \frac{\partial \phi}{\partial z}\hat{u}_z}$$

Un campo vectorial

- Como hemos visto antes, ϕ varía al moverse en cualquier dirección. Definimos así la derivada direccional. Queremos ver cómo varía ϕ al moverse según la dirección del vector $\hat{u}$ una cantidad infinitesimal ds:

$$d\vec{r} = ds\,\hat{u}$$

- Como hemos visto antes, $d\phi = \vec{\nabla}\phi \cdot d\vec{r} = \vec{\nabla}\phi \cdot (ds \cdot \hat{u}) = ds\,\vec{\nabla}\phi \cdot \hat{u}$
- Así, la derivada direccional queda $\boxed{\frac{d\phi}{ds} = \vec{\nabla}\phi \cdot \hat{u}}$

- Con esto redefinimos las derivadas parciales:

$$\text{si } \hat{u} = \hat{u}_x,\ d\vec{r} = dx\,\hat{u}_x;\ d\phi = dx\,\underbrace{\vec{\nabla}\phi \cdot \hat{u}_x}_{=\frac{\partial \phi}{\partial x}};\ \frac{d\phi}{dx} = \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

Las derivadas parciales son derivadas direccionales al moverse según las direcciones de los ejes

- Interpretamos ahora el gradiente geométricamente:
  - Antes de nada, definimos una superficie equiescalar como la superficie dada por: $\phi(x,y,z) = k;\ k \in \mathbb{R}$
  - Consideramos que P y P' están ambos en una superficie ($\phi = cte$) $\Rightarrow d\phi = 0$

  - Cuanto más cerca esté P' de P, más se parece $d\vec{r}$ a la tgte. En el límite, $d\vec{r}$ es tgte. a la superficie
  - $d\phi = 0 = \vec{\nabla}\phi \cdot d\vec{r} \Rightarrow \vec{\nabla}\phi \perp d\vec{r} \xRightarrow{d\vec{r}\text{ tgte. a superficie}} \boxed{\vec{\nabla}\phi \text{ es Tgte. a la superficie equiescalar}}$

NABLA

· Definimos el operador $\vec{\nabla}$:

$$\boxed{\vec{\nabla} \equiv \hat{u}_x \frac{\partial}{\partial x} + \hat{u}_y \frac{\partial}{\partial y} + \hat{u}_z \frac{\partial}{\partial z}}$$

Primero se deriva y luego se multiplica por unitario (En cartesianas no hay diferencia, ya que los vectores de la base son ctes.; pero en esféricas y cilíndricas sí la hay)

· El gradiente de ϕ se puede ver como $\vec{\nabla}$ actuando sobre ϕ (rellenamos con ϕ los huecos)

· Se demuestra que es el único operador con derivadas primeras:

- Lineal ($\vec{\nabla}(\alpha f + \beta g) = \alpha \vec{\nabla} f + \beta \vec{\nabla} g$)
- No depende del S.R. (que se puede rotar/trasladar)

· Obtengamos $\vec{\nabla}$ en <u>cilíndricas</u>:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \phi} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \cdot \underbrace{\frac{\partial z}{\partial x}}_{=0} = (\dots) = \frac{x}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{y}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial \phi}$$

(vista en gradiente: $\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{d\rho}{dx} = \frac{1}{dx}\left[\frac{\partial \rho}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial \rho}{\partial \phi} d\phi + \frac{\partial \rho}{\partial z} dz\right] = \frac{\partial \rho}{\partial \rho} \cdot \frac{d\rho}{dx} + \frac{\partial \rho}{\partial \phi}\frac{d\phi}{dx} + \frac{\partial \rho}{\partial z}\frac{dz}{dx}$) $= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{\rho}$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}$$

Así, sustituyendo $\begin{cases} \hat{u}_x = \cos\phi \, \hat{u}_\rho - \sin\phi \, \hat{u}_\phi \\ \hat{u}_y = \sin\phi \, \hat{u}_\rho + \cos\phi \, \hat{u}_\phi \\ \hat{u}_z = \hat{u}_z \end{cases}$, queda, tras operar y manipular:

$$\boxed{\vec{\nabla} = \hat{u}_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \hat{u}_\phi \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \phi} + \hat{u}_z \frac{\partial}{\partial z}}$$

· Y en <u>esféricas</u>:

$$\boxed{\vec{\nabla} = \hat{u}_r \frac{\partial}{\partial r} + \hat{u}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{u}_\phi \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}}$$

DIVERGENCIA

· Aplicamos $\vec{\nabla}$ sobre un campo vectorial $\vec{A}$ para asignarle así un campo escalar.

· Definimos la divergencia de $\vec{A}$:

$$\boxed{\operatorname{div}\vec{A} = \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}}$$

· Tiene también sgdo. físico: si $\vec{A}$ es el campo de velocidades de un fluido se tiene:

- $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} < 0$: Los vectores convergen hacia ese punto (un sumidero en fluidos)
  las líneas de campo
- $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} > 0$: las líneas de campo divergen de ese punto (fuente en fluidos)
- $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0$: las líneas de campo ni convergen ni divergen (ni fuente ni sumidero)
  Campo solenoidal

· En el campo eléctrico, que nace en cargas positivas ($\vec{\nabla}\cdot\vec{E} > 0$) y muere en negativas ($\vec{\nabla}\cdot\vec{E} < 0$), tendrá divergencia $\neq 0$.

· Veamos en cilíndricas:

1º se opera y LUEGO se multiplica por el unitario

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \left(\hat{u}_x \frac{\partial}{\partial\rho} + \hat{u}_\phi \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\phi} + \hat{u}_z \frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(A_\rho \hat{u}_\rho + A_\phi \hat{u}_\phi + A_z \hat{u}_z\right) =$$

$$= \hat{u}_\rho \cdot \frac{\partial}{\partial\rho}\left(A_\rho \hat{u}_\rho + A_\phi \hat{A}_\phi + A_z \hat{u}_z\right) + \hat{u}_\phi \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(A_\rho \hat{u}_\rho + A_\phi \hat{u}_\phi + A_z \hat{u}_z\right) +$$

$$+ \hat{u}_z \frac{\partial}{\partial z}\left(A_\rho \hat{u}_\rho + A_\phi \hat{u}_\phi + A_z \hat{u}_z\right)$$

Y como los vectores de la base no son cte, se tiene que, p. ej., $\frac{\partial A_\rho \hat{u}_\rho}{\partial\rho} \neq \frac{\partial A_\rho}{\partial\rho}\hat{u}_\rho$; $\frac{\partial A_\rho \hat{u}_\rho}{\partial\rho} = \frac{\partial A_\rho}{\partial\rho}\hat{u}_\rho + \frac{\partial \hat{u}_\rho}{\partial\rho}A_\rho$. Ya que como $\hat{u}_\rho = \cos\phi\,\hat{u}_x + \operatorname{sen}\phi\,\hat{u}_y$; $\frac{\partial\hat{u}_\rho}{\partial\phi} =$

$= -\operatorname{sen}\phi\,\hat{u}_x + \cos\phi\,\hat{u}_y = \hat{u}_\phi$. Las derivadas no nulas son:

$$\boxed{\frac{\partial\hat{u}_\rho}{\partial\phi} = \hat{u}_\phi \qquad \frac{\partial\hat{u}_\phi}{\partial\phi} = -\hat{u}_\rho}$$

Tras calcular se llega a:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{\partial A_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} A_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Que se suele escribir:

$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}}$$

· En esféricas, donde las derivadas $\neq 0$ son:

$$\boxed{\begin{array}{l} \dfrac{\partial \hat{u}_r}{\partial \theta} = \hat{u}_\theta \;;\; \dfrac{\partial \hat{u}_r}{\partial \phi} = \operatorname{sen}\phi\, \hat{u}_\theta \;;\; \dfrac{\partial \hat{u}_\theta}{\partial \theta} = -\hat{u}_r \\[2ex] \dfrac{\partial \hat{u}_\theta}{\partial \phi} = \cos\theta\, \hat{u}_\phi ;\; \dfrac{\partial \hat{u}_\phi}{\partial \theta} = 0 \;;\; \dfrac{\partial \hat{u}_\phi}{\partial \phi} = -(\operatorname{sen}\theta\, \hat{u}_r + \cos\theta\, \hat{u}_\theta) \end{array}}$$

Se llega a:

$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{r\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\operatorname{sen}\theta\, A_\theta) + \frac{1}{r\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}}$$

ROTACIONAL

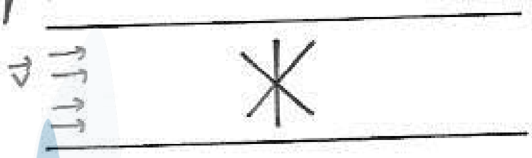
· Aplicamos ahora $\vec{\nabla}$ sobre un campo vectorial $\vec{A}$ para originar otro campo escalar.

· Definimos el rotacional de $\vec{A}$:

$$\boxed{\text{rot}\,\vec{A} = \vec{\nabla}\times\vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\hat{u}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\hat{u}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\hat{u}_z}$$

Se puede recordar como:
$$\boxed{\begin{vmatrix} \hat{u}_x & \hat{u}_y & \hat{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}}$$

· Veamos ahora su sgdo. físico. Imaginemos un fluido y su campo de velocidades a una tubería con un aspa:



Si la velocidad no depende de Y, el aspa no se moverá. En este caso, se ve trivialmente que $\vec{\nabla}\times\vec{v}=0$.

Si la velocidad abajo es mayor, el aspa girará ↻. Aquí $\vec{\nabla}\times\vec{v}\neq 0$

Es decir, siempre que $\vec{\nabla}\times\vec{v}\neq 0$, habrá fenómenos de rotación

- En un campo cualquiera, cuando $\vec{\nabla}\times\vec{A}\neq 0$, las líneas de campo se curvarán, habrá trayectorias curvadas...

· Veamos en cilíndricas:

$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \left(\hat{u}_\rho\times\frac{\partial}{\partial\rho}+\hat{u}_\phi\times\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\phi}+\hat{u}_z\times\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(A_\rho\hat{u}_\rho+A_\phi\hat{u}_\phi+A_z\hat{u}_z\right)$$

Recordamos, primero se deriva y luego se multiplica vectorialmente. Sabiendo que:

$$\boxed{\hat{u}_\rho\times\hat{u}_z=-\hat{u}_\phi \;;\; \hat{u}_\rho\times\hat{u}_\phi=\hat{u}_z \;;\; \hat{u}_\phi\times\hat{u}_z=\hat{u}_\rho}$$

Tras operar mucho, queda:

$$\boxed{\vec{\nabla}\times\vec{A} = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial\phi}-\frac{\partial A_\phi}{\partial z}\right)\hat{u}_\rho + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial\rho}\right)\hat{u}_\phi + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_\phi)-\frac{\partial A_\rho}{\partial\phi}\right)\hat{u}_z}$$

· En esféricas:

$$\boxed{\vec{\nabla}\times\vec{A} = \frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}(\mathrm{sen}\,\theta A_\phi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial\phi}\right)\hat{u}_r + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\phi} - \frac{\partial}{\partial r}(rA_\phi)\right)\hat{u}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)\hat{u}_\phi}$$

OPERANDO CON $\vec\nabla$

· Sabemos que es lineal:

$$\boxed{\begin{aligned}&\vec\nabla(\alpha\,\phi+\beta\psi)=\alpha\,\vec\nabla\phi+\beta\,\vec\nabla\psi\\&\vec\nabla\cdot(\alpha\vec A+\beta\vec B)=\alpha\,\vec\nabla\cdot\vec A+\beta\,\vec\nabla\cdot\vec B\\&\vec\nabla\times(\alpha\vec A+\beta\vec B)=\alpha\,\vec\nabla\times\vec A+\beta\,\vec\nabla\times\vec B\end{aligned}}$$

· También cumple la regla de Leibniz:

$$\boxed{\vec\nabla\cdot(\phi\,\psi)=\phi\,\vec\nabla\psi+\psi\,\vec\nabla\phi}$$ Gradiente del producto entre escalares

· Otra propiedad es:

$$\boxed{\vec\nabla(\vec A\cdot\vec B)=\underbrace{\vec A\times(\vec\nabla\times\vec B)+\vec B\times(\vec\nabla\times\vec A)}_{\text{Parte de Leibniz}}+\underbrace{(\vec A\cdot\vec\nabla)\vec B+(\vec B\cdot\vec\nabla)\vec A}_{\text{Parte de introducción }\vec A\vec\nabla}}$$ Gradiente del producto entre vectores

habiendo definido $\boxed{\vec A\cdot\vec\nabla=A_x\frac{\partial}{\partial x}+A_y\frac{\partial}{\partial y}+A_z\frac{\partial}{\partial z}}$. Así, $(\vec A\cdot\vec\nabla)\vec B=\left(A_x\frac{\partial}{\partial x}+A_y\frac{\partial}{\partial y}+A_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(B_x\hat u_x+B_y\hat u_y+B_z\hat u_z)=$

$$=A_x\frac{\partial\vec B}{\partial x}+A_y\frac{\partial\vec B}{\partial y}+A_z\frac{\partial\vec B}{\partial z}$$

Así, $\vec A\cdot\vec\nabla\neq\vec\nabla\cdot\vec A$

$\Downarrow$ un nuevo operador

$\Downarrow$ $\vec\nabla$ actuando sobre $\vec A$

· Más propiedades:

$$\boxed{\vec\nabla\times(\vec A\times\vec B)=\underbrace{\vec A(\vec\nabla\cdot\vec B)-\vec B(\vec\nabla\cdot\vec A)}_{\text{Parte de Leibniz con }-}+\underbrace{(\vec B\cdot\vec\nabla)\vec A-(\vec A\cdot\vec\nabla)\vec B}_{\text{Parte de introducción }\vec A\cdot\vec\nabla\text{ con un }-}}$$ Rotacional del producto entre vectores

Leibniz con $-$ $$\boxed{\vec\nabla\cdot(\vec A\times\vec B)=\vec B\cdot(\vec\nabla\times\vec A)-\vec A\cdot(\vec\nabla\times\vec B)}$$ Divergencia del producto entre vectores

Leibniz $$\boxed{\vec\nabla\cdot(\phi\vec A)=\phi(\vec\nabla\cdot\vec A)+\vec A\cdot(\vec\nabla\phi)}$$ Divergencia de escalar vector

Leibniz $$\boxed{\vec\nabla\times(\phi\vec A)=\phi\,\vec\nabla\times\vec A+(\vec\nabla\phi)\times\vec A}$$ Rotacional de escalar vector

Dolle aplicación de $\vec{\nabla}$ MUY IMPORTANTE

- $\boxed{\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\phi)=0}$
- $\boxed{\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A})=0}$

- Una doble aplicación muy importante:

$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\phi)\equiv\nabla^2\phi=\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}}$$

A ∇^2 se le denomina laplaciano

- Otra: $\boxed{\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A})=\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A})-\nabla^2\vec{A}}$

Interpretando $\nabla^2\vec{A}$ como $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)(A_x\hat{u}_x+A_y\hat{u}_y+A_z\hat{u}_z)$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\nabla^2\vec{A}=[\nabla^2A_x]\hat{u}_x+[\nabla^2A_y]\hat{u}_y+[\nabla^2A_z]\hat{u}_z}$$

INTEGRALES

. Hasta ahora hemos estudiado un campo localmente: en un punto y su entorno infinitesimal. Ahora vamos a estudiar funciones en una zona más amplia: integrando.

· Para eso, recordemos lo que es una integral:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{N\to+\infty} \sum_i f(x_i)\,\Delta x_i}$$

INTEGRALES DE LÍNEA

- Quiero calcular el equivalente a una integral en $\mathbb{R}^3$. Para eso, tomamos una curva $\vec{r}$ y un campo escalar ϕ:

Coeficientes rosalle

$$\boxed{\int_A^B \phi(\vec{r})\,d\vec{r} \equiv \lim_{\delta\vec{r}\to 0} \sum \phi(\vec{r})\,\delta\vec{r}}$$

Es un punto del espacio

Es un punto del espacio

- Siendo $\delta\vec{r}$ los tramos a los que dividimos $\vec{r}$ y $\phi(\vec{r})$ el valor de la función ϕ en dicho tramo
- Nótese que, en el límite, $\delta\vec{r}$ (es decir, $d\vec{r}$) será tgte. a la curva

·El resultado es un vector. Además, se tiene: Pq. el límite de la suma es la suma de los límites, y separamos cada sumando por componentes

$$\boxed{\int_A^B \phi(\vec{r})\,d\vec{r} = \hat{u}_x \int_A^B \phi\,dx + \hat{u}_y \int_A^B \phi\,dy + \hat{u}_z \int_A^B \phi\,dz}$$

·Ahora, $\int_A^B \phi\,dx$ y el resto aún no son integrales normales: ϕ depende, no sólo de x, sino de y y de z. No se puede integrar respecto de x y considerar y, z ctes. pq al moverse por la curva, y, z VARÍAN!

· Para hacer la integral, nos aprovechamos de que la curva está dada por $\begin{cases} x = x(\lambda) \\ y = y(\lambda) \\ z = z(\lambda) \end{cases}$, tomando λ en A y B los valores λ_A y λ_B, respectivamente. Así, haciendo el cambio de variable:

$$\boxed{\begin{aligned} x = x(\lambda);\ dx &= \left(\frac{dx}{d\lambda}\right)d\lambda \\ y = y(\lambda);\ dy &= \left(\frac{dy}{d\lambda}\right)d\lambda \\ z = z(\lambda);\ dz &= \left(\frac{dz}{d\lambda}\right)d\lambda \end{aligned}}$$

el problema se reduce a integrales respecto de una variable:

$$\int_A^B \phi(\vec{r})\,d\vec{r} = \hat{u}_x \int_{\lambda_A}^{\lambda_B} \phi(\lambda)\,d\lambda + \dots$$

- La curva tb. puede estar dada por $\begin{cases} S_1(x,y,z)=0 \\ S_2(x,y,z)=0 \end{cases}$ (intersección de dos superficies).

Aquí, se pueden despejar dos variables en función de una tercera, p. ej. $\begin{cases} y=y(x) \\ z=z(x) \end{cases}$

La curva sería ahora $\begin{cases} x=\lambda \\ y=y(\lambda) \\ z=z(\lambda) \end{cases}$ y estamos en el caso anterior.

• Podemos complicar el asunto usando campo vectorial $\vec{A}(\vec{r})$:

$$\boxed{\int_A^B \vec{A}(\vec{r})\cdot d\vec{r} = \lim_{\delta\vec{r}\to 0} \sum \vec{A}(\vec{r})\cdot\delta\vec{r}} = \int_A^B (A_x\,dx + A_y\,dy + A_z\,dz)$$

- Es un escalar

- Se resuelve con el mismo cambio de variable de antes

Nota: para darnos cuenta de que esto no son integrales normales (en las cuales $\int_A^A f(x)\,dx = 0\ \forall f$) se puede ver que $\int_A^A \vec{A}(\vec{r})\,d\vec{r} \neq 0$, por ser todos los sumandos positivos (p. ej., si resulta que $\vec{A}$ es paralelo a $d\vec{r}$ para la curva dada el campo $\vec{B}$)

• Y si en vez de p. e. usamos productos vectoriales:

$$\boxed{\int_A^B \vec{A}(\vec{r})\times d\vec{r} = \lim_{\delta\vec{r}\to 0} \sum \vec{A}(\vec{r})\times\delta\vec{r}} = \boxed{\hat{u}_x\int_A^B (A_y\,dz - A_z\,dy) + \hat{u}_y\int_A^B (A_z\,dx - A_x\,dz) + \hat{u}_z\int_A^B (A_x\,dy - A_y\,dx)}$$

- Es un vector

- Se resuelve con el cambio de variable de siempre

Importante: $d\vec{r}$ en otras coordenadas (Desarrollo explicado en apuntes)

Cart $d\vec{r} = dx\,\hat{u}_x + dy\,\hat{u}_y + dz\,\hat{u}_z$

Cil $d\vec{r} = d\rho\,\hat{u}_\rho + \rho\,d\phi\,\hat{u}_\phi + dz\,\hat{u}_z$

Esf $d\vec{r} = dr\,\hat{u}_r + r\,d\theta\,\hat{u}_\theta + r\,\text{sen}\,\theta\,d\phi\,\hat{u}_\phi$

INTEGRALES DE SUPERFICIE

- Antes de nada, una superficie se puede determinar con un vector:
  - Módulo área
  - Dirección $\perp$ a la superficie
  - Sentido dado por la orientación del espacio vectorial: para dar la superficie se dibuja una línea envolvente en un sentido $\Rightarrow$ ese sentido nos da el sentido del vector (como sacacorchos). Si $\nexists$ envolvente (sup. cerrada), puede ir hacia dentro o fuera. Convenio, normalmente fuera.

- Definimos el vector elemento de superficie (suficientemente pequeño para que sea plano y $\exists$ vector $\hat{n}$):

$$\boxed{d\vec{s} = \underbrace{ds}_{\text{Área del elemento}} \cdot \overbrace{\hat{n}}^{\perp \text{ al elemento}} = ds \frac{\vec{\nabla} S}{|\vec{\nabla} S|}}$$

$\vec{\nabla} S$ es $\perp$ a superficie

OJO! orientamos el gradiente para que tenga el sentido de $\hat{n}$

- Empezamos a definir integrales. Con un campo escalar ϕ:

$$\boxed{\int_S \phi(\vec{r})\, d\vec{s} = \lim_{\delta\vec{s}\to 0} \sum \phi(\vec{r})\, \delta\vec{s}} = \boxed{\hat{u}_x \int_S \phi \frac{\partial S/\partial x}{|\vec{\nabla} S|} ds + \hat{u}_y \int_S \phi \frac{\partial S/\partial y}{|\vec{\nabla} S|} ds + \hat{u}_z \int_S \phi \frac{\partial S/\partial z}{|\vec{\nabla} S|} ds}$$

- Es un vector
- Para resolverlo (ES DIFICIL) se pone la superficie S en función de 2 parámetros

- Y con campos vectoriales:

$$\boxed{\int_S \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{s} = \lim_{\delta\vec{s}\to 0} \sum \vec{F}(\vec{r}) \cdot \delta\vec{s}} = \boxed{\int_S \frac{1}{|\vec{\nabla} S|} \left(F_x \frac{\partial S}{\partial x} + F_y \frac{\partial S}{\partial y} + F_z \frac{\partial S}{\partial z} \right) ds}$$

$$\boxed{\int_S \vec{F}(\vec{r}) \times d\vec{s} = \lim_{\delta S\to 0} \sum \vec{F}(\vec{r}) \times \delta\vec{s}}$$

- Si una superficie está en el plano XY, lo lógico es tomar cuadraditos: $\boxed{\begin{array}{l} ds = dx\,dy \\ \hat{n} = \hat{u}_z \end{array}}$ (plana)

· Si la superficie es un cilindro (desarrollo y dibujos en apuntes), queda (siendo a el radio del cilindro):

$$\boxed{\begin{aligned} \hat{n} &= \hat{u}_\rho \\ ds &= a\, d\phi\, dz \end{aligned}}$$

· Si la superficie es una esfera de radio a, queda (dibujo en modelo):

$$\boxed{\begin{aligned} \hat{n} &= \hat{u}_r \\ ds &= a^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi \end{aligned}}$$

INTEGRALES DE VOLUMEN

- Ahora el elemento diferencial, dV, es un escalar.

- Se pueden definir dos integrales:

$$\boxed{\int_V \phi(\vec{r})\, dV = \lim_{\delta V \to 0} \sum \phi(\vec{r})\, \delta V}$$ (Un escalar)

$$\boxed{\int_V \vec{F}(\vec{r})\, dV = \lim_{\delta V \to 0} \sum \vec{F}(\vec{r})\, \delta V}$$ (Un vector)

- dV vale, en distintas coordenadas (gráficos en Moodle)

$dV = dx\, dy\, dz$ (cubitos)

$dV = r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi\, dr$ (infinitesimalmente, es un paralelepípedo, aunque se construya atendiendo a cuadraditos en corteza esférica)

$dV = \rho\, d\rho\, d\phi\, dz$ (infinitesimalmente es un paralelepípedo, aunque se construya atendiendo a cuadraditos en corteza cilíndrica)

TEOREMAS

Hay varios teoremas muy útiles para calcular integrales:

- **T^ma de la divergencia**: dada una superficie cerrada S, que encierra un volumen V, cualquiera:

Flujo

$$\boxed{\oint_S \vec{A}\cdot d\vec{S} = \int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{A}\, dV}$$

Nos da info sobre la componente $\perp$ a la superficie de $\vec{A}$

- $\forall\ \vec{A}, S, V$
- Tomando el vector $d\vec{S}$ hacia fuera de la superficie
- Estamos relacionando info de $\vec{A}$ en la superficie con info en el volumen, y viceversa

Corolario: si $\vec{A} = \phi\vec{\nabla}\psi$:

$$\boxed{\oint_S [\phi\vec{\nabla}\psi]\cdot d\vec{S} = \int_V \vec{\nabla}\cdot(\phi\vec{\nabla}\psi)\, dV = \int_V (\vec{\nabla}\phi\cdot\vec{\nabla}\psi + \phi\nabla^2\psi)\, dV} \Rightarrow \text{1}^{\text{er}} \text{ teorema de Green}$$

$$\boxed{\oint_S (\phi\vec{\nabla}\psi - \psi\vec{\nabla}\phi)\cdot d\vec{S} = \int_V (\phi\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\phi)\, dV} \Rightarrow \text{2}^{\text{o}} \text{ teorema de Green}$$

Se obtiene aplicando el 1^er teorema a $\phi\vec{\nabla}\psi$ y $\psi\vec{\nabla}\phi$, y restando

- **T^ma de Stokes**: dada una curva cerrada C, que encierra una superficie S, cualquiera:

$$\boxed{\oint_C \vec{A}\cdot d\vec{r} = \int_S (\vec{\nabla}\times\vec{A})\cdot d\vec{S}}$$

- $\forall\ \vec{A}, C, S$
- Tomando el vector $d\vec{S}$ en el sentido de avance de un sacacorchos que gira en el sentido elegido para circular en la primera integral