TEMA 5: FORMAS BILINEALES Y CUADRÁTICAS

1- Formas bilineales
2- Expr. matricial de una forma bilineal
3- ortogonalidad
4- Formas no degeneradas
5- Bases ortogonales
6- Ley de inercia
7- Formas cuadráticas

1) FORMAS BILINEALES

Def.: Sea V un K-espacio vectorial. Una forma bilineal es una aplicación $f: V\times V \longrightarrow K$, que cumple:

$$\forall \alpha,\beta \in K \quad \forall x,y,z \in V$$

$$i)\ f(\alpha x+\beta y, z) = \alpha f(x,z) + \beta f(y,z)$$

$$ii)\ f(x, \alpha y+\beta z) = \alpha f(x,y) + \beta f(x,z)$$

Ejemplos:

1) $V=K$ es un K-espacio vectorial

$$f: K\times K \longrightarrow K, \quad \underset{(\text{fijo})}{\forall k \in K}, \quad x,y\in K$$

$$(x,y) \longrightarrow kxy$$

es una forma bilineal

$\alpha, \beta \in K \quad , x, y, z \in K$

i) $f(\alpha x + \beta y, z) = K(\alpha x + \beta y) \cdot z = K\alpha x z + K\beta y z = \alpha K x z + \beta K y z$

$= \alpha f(x, z) + \beta f(y, z)$

ii) Se haría igual

Así, f es bilineal

2) $V = \mathbb{R}^2 \; , \; K = \mathbb{R}$

$f(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) \longrightarrow \mathbb{R} \; ; \; x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 (\mathcal{B}_c) \; y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 (\mathcal{B}_c)$

$f(x, y) = x_1 y_1 - 2 x_1 y_2$

¿es bilineal?

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$x, y, z \in \mathbb{R}^2$

i) $f(\alpha x + \beta y, z) = (\alpha x_1 + \beta y_1) z_1 - 2(\alpha x_1 + \beta y_1) z_2 = \alpha x_1 z_1 + \beta y_1 z_1 - 2\alpha x_1 z_2 - 2\beta y_1 z_2$

$= \alpha x_1 z_1 - 2\alpha x_1 z_2 + \beta y_1 z_1 - 2\beta y_1 z_2 = \alpha f(x, z) + \beta f(y, z)$

ii) Igual

Así, f es bilineal

3) $V = \mathbb{R}^4 \; , \; K = \mathbb{R}$

$f: \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R} \; ; \; x = (x_1, y_1, z_1, t_1) \in \mathbb{R}^4$

$y = (x_2, y_2, z_2, t_2) \in \mathbb{R}^4$

$\boxed{\begin{array}{l} f(x, y) = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 - c^2 t_1 t_2 \\ \text{con } c \in \mathbb{R} \text{ y } c > 0 \text{ ; es una forma bilineal, la forma de Lorentz.} \end{array}}$

(Usada en física)

4) $V = K^n$. La forma bilineal canónica es:

$$f: K^n \times K^n \longrightarrow K \; ; \; x = (x_1, \dots, x_n) \in K^n$$
$$y = (y_1, \dots, y_n) \in K^n$$

$$f(x,y) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$$

Obs. 1: $f: V \times V \longrightarrow K$
$(x,y) \longrightarrow 0$ es una forma bilineal ($f \equiv 0$)

Teorema: $\boxed{\text{Si } f \text{ es una forma bilineal y } f \not\equiv 0 \longrightarrow f \text{ es sobreyectiva}}$

$\boxed{\text{Es decir, una forma bilineal es o idénticamente nula } (\equiv 0) \text{ o sobreyectiva}}$

$\updownarrow$

$\exists x, y \in V$ tq $f(x,y) \neq 0_K$

Demostración:

$f \not\equiv 0 \longleftrightarrow \exists x, y \in V$ tq $f(x,y) \neq 0_K$

¿$\forall \alpha \in K, \exists v_1, v_2 \in V : f(v_1, v_2) = \alpha$?

$$f\Bigg(\frac{\overbrace{\alpha}^{\in K}}{f(x,y)} x, y\Bigg) \underset{f \text{ bilineal}}{\overset{1}{=}} \frac{\alpha}{\cancel{f(x,y)}} \cancel{f(x,y)} = \alpha \rightarrow v_1 = \frac{\alpha}{f(x,y)} x$$
$$v_2 = y$$

$\downarrow$

Se puede dividir pq $f(x,y) \neq 0$

DEMOSTRADO

Proposición 1: Sea $f: V \times V \to K$

f es bilineal $\longleftrightarrow$ $\forall \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in K$, $\forall x, y, z, w \in V$

$$\boxed{f(\alpha_1 x + \beta_1 y, \alpha_2 z + \beta_2 w) = \alpha_1 \alpha_2 f(x,z) + \alpha_1 \beta_2 f(x,w) + \beta_1 \alpha_2 f(y,z) + \beta_1 \beta_2 f(y,w)}$$

Parecido a un producto $(ax+by)(cz+dw)$

Proposición 2: Sea $f: V \times V \to K$ forma bilineal y $x_0 \in V$, entonces son lineales las siguientes aplicaciones:

$$\varphi: V \longrightarrow K$$
$$x \longrightarrow f(x_0, x)$$

$$\psi: V \longrightarrow K$$
$$x \longrightarrow f(x, x_0)$$

Proposición 3: Sea V un K-espacio vectorial.

Si $\Psi_1, \Psi_2: V \to K$ son lineales

$$f: (V \times V) \longrightarrow K$$
$$(x,y) \longrightarrow f(x,y) = \Psi_1(x) \cdot \Psi_2(y)$$

es una forma bilineal

Proposición 4: Sea $f: V\times V \longrightarrow K$ una forma bilineal. Se cumple $\forall x \in V$:

i) $f(0_V, x) = 0_K = f(x, 0_V)$

ii) $\forall y \in V \quad f(-x, y) = -f(x,y) = f(x,-y)$

iii) $\forall \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\} \in K \quad \forall \{x_1, \dots, x_k\} \in V$:

$$f\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i, x\right) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i f(x_i, x)$$

$$f\left(x, \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i f(x, x_i)$$

Demostración:

i) $f(0_V, x) = f(x-x, x) \underset{\text{Bilineal}}{=} f(x,x) + f(-x,x) \underset{\text{Bilineal}}{=} f(x,x) - f(x,x) = 0_K$

$f(x, 0_V) = f(x, x-x) \underset{\text{Bilineal}}{=} f(x,x) + f(x,-x) \underset{\text{Bilineal}}{=} f(x,x) - f(x,x) = 0_K$

Proposición 5: Sea $f: V\times V \to K$ bilineal. Entonces:

i) $\forall x, y \in V \quad f(x+y, x+y) - f(x-y, x-y) = 2[f(x,y) + f(y,x)]$

ii) $\forall x, y \in V \quad f(x+y, x+y) + f(x-y, x-y) = 2[f(x,x) + f(y,y)]$

iii) $\forall x, y \in V \quad f(x,y) + f(y,x) = f(x+y, x+y) - f(x,x) - f(y,y)$

i) $f(x+y,x+y) - f(x-y,x-y) = \cancel{f(x,x)} + f(x,y) + f(y,x) + \cancel{f(y,y)} - \cancel{f(x,x)} + f(x,y) + f(y,x) - \cancel{f(y,y)} = 2[f(x,y) + f(y,x)]$

ii) $f(x+y,x+y) + f(x-y,x-y) = f(x,x) + \cancel{f(x,y)} + \cancel{f(y,x)} + f(y,y) + f(x,x) - \cancel{f(x,y)} - \cancel{f(y,x)} + f(y,y) = 2[f(x,x) + f(y,y)]$

iii) $f(x+y,x+y) - f(x,x) - f(y,y) = \cancel{f(x,x)} + f(x,y) + f(y,x) + \cancel{f(y,y)} - \cancel{f(x,x)} - \cancel{f(y,y)} = f(x,y) + f(y,x)$

2) EXPRESIÓN MATRICIAL DE UNA FORMA BILINEAL

Sea V un K-espacio vectorial de dimensión finita $n \neq 0$

Sea $\mathcal{B}_V = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V:

$$\forall v \in V \; ; \; v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n \; ; \; \alpha_i \in K$$

de manera única

Sea $f: V \times V \to K$ una forma bilineal, y x e y dos vectores de V:

$$x = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$$

$$y = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n$$

$$f(x,y) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \, , \sum_{j=1}^{n} \beta_j v_j\right) \underset{f \text{ es bilineal}}{=} \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i \beta_j f(v_i, v_j) =$$

$$= (\alpha_1 \cdots \alpha_n) \underbrace{\begin{pmatrix} f(v_1,v_1) & \cdots & f(v_1,v_n) \\ \vdots & & \vdots \\ f(v_n,v_1) & \cdots & f(v_n,v_n) \end{pmatrix}}_{\in M_{n \times n}(K) \to f(v_i, v_j) \text{ es un escalar}} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \boxed{X^t A_{\mathcal{B}_V} Y = f(x,y)}$$

Donde $\to$ $X = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$ $\quad A_{\mathcal{B}_V} = \begin{pmatrix} f(v_1,v_1) & \cdots & f(v_1,v_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f(v_n,v_1) & \cdots & f(v_n,v_n) \end{pmatrix}$, matriz de la forma bilineal f asociada a la base $\mathcal{B}_V$

MATRIZ ASOCIADA A UNA APLICACIÓN BILINEAL

$f: V \times V \longrightarrow K$ bilineal

$\mathcal{B}_V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ base de V

La matriz de f en la base $\mathcal{B}_V$ es:

$$M_{\mathcal{B}_V}(f) = \begin{pmatrix} f(v_1,v_1) & \cdots & f(v_1,v_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f(v_n,v_1) & \cdots & f(v_n,v_n) \end{pmatrix}$$

$x = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n$

$y = \beta_1 v_1 + \ldots + \beta_n v_n$

$$f(x,y) = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i \beta_j f(v_i, v_j)$$

$$X = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ | \\ \alpha_n \end{pmatrix} \qquad \boxed{f(x,y) = X^t M_{\mathcal{B}_V}(f)\, Y}$$

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ | \\ y_n \end{pmatrix}$$

Si $\mathcal{B}'_V = \{v'_1, \ldots, v'_n\}$ es otra base y $X = M_{\mathcal{B}'_V \mathcal{B}_V} X'$; $Y = M_{\mathcal{B}'_V \mathcal{B}_V} Y'$

$$f(x,y) = (M_{\mathcal{B}'_V \mathcal{B}_V} X')^t M_{\mathcal{B}_V}(f) \, (M_{\mathcal{B}'_V \mathcal{B}_V} Y')$$

$$f(x,y) = (X')^t \left((M_{\mathcal{B}'_V \mathcal{B}_V})^t M_{\mathcal{B}_V}(f) \, M_{\mathcal{B}'_V \mathcal{B}_V} \right) Y'$$

$$\boxed{M_{\mathcal{B}'_V}(f) = (M_{\mathcal{B}'_V \mathcal{B}_V})^t \, M_{\mathcal{B}_V}(f) \, M_{\mathcal{B}'_V \mathcal{B}_V}}$$

Y, viceversa, si V es un espacio vectorial de dimensión n, $\mathcal{B}_V$ base de V y $A \in Mat_{n\times n}(K)$:

Dados | V e.v. ; $\mathcal{B}_V$ base ; $A \in Mat_{n\times n}(K)$

$\exists f$ bilineal tq $A_{\mathcal{B}}(f) = A$

$$f: V\times V \longrightarrow K$$

$$f(x,y) = X^t A Y, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$ es una forma bilineal, donde:

$$a_{ij} = f(v_i, v_j)$$

TODA MATRIZ CUADRADA SE PUEDE INTERPRETAR COMO ASOCIADA A UNA FORMA BILINEAL

Pero, ¿y si cambiamos de base?

Sean $\mathcal{B}_V = \{v_1, \dots, v_n\}$ y $\mathcal{B}'_V = \{v'_1, \dots, v'_n\}$ dos bases de V.

$\forall x \in V$: $x = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$

$x = \beta_1 v'_1 + \dots + \beta_n v'_n$

$X = QX'$; siendo Q la matriz de cambio de base

$$f(x,y) = X^t A_{\mathcal{B}_V} Y = (QX')^t A_{\mathcal{B}_V} (QY') = (X')^t Q^t A_{\mathcal{B}_V} Q Y'$$

$$\boxed{A_{\mathcal{B}'_V} = (M_{\mathcal{B}'_V \mathcal{B}_V})^t A_{\mathcal{B}_V} M_{\mathcal{B}'_V \mathcal{B}_V}}$$

Definición: dos matrices $A, B \in Mat_{n\times n}(K)$ se dicen congruentes si existe una matriz $P \in Mat_{n\times n}(K)$ invertible tq.:

$$B = P^t A P$$

Así; $\exists P^{-1}$ invertible tq.:

$$A = (P^{-1})^t B P^{-1}$$

Universidad del País Vasco / Euskal Herriko Unibertsitatea

IKASLEEN ERREKTOREORDETZA
VICERRECTORADO DE ALUMNADO

Corolario: dos matrices son congruentes si y sólo si están asociadas a (la) misma forma bilineal.

Corolario: si A y B son congruentes, $rg(A) = rg(B)$

Corolario: el rango de la matriz asociada a una forma bilineal no depende de la base elegida.

C1

$\Rightarrow$ $B = P^t A P$

$A = A_{\mathcal{B}_V}(f)$ con $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ bilineal

$\downarrow$ Dados V, $\mathcal{B}_V$ y A

$\exists f$

Al ser P invertible, $\exists \mathcal{B}'_V$ tq $P = M_{\mathcal{B}'_V \mathcal{B}_V}$

Así, $B = (M_{\mathcal{B}'_V \mathcal{B}_V})^t A_{\mathcal{B}_V}(f) (M_{\mathcal{B}'_V \mathcal{B}_V}) = \boxed{A_{\mathcal{B}'_V}(f) = B}$ C.Q.D.

$\Leftarrow$ $A = A_{\mathcal{B}_V}(f)$

$B = A_{\mathcal{B}'_V}(f)$ $\quad B = (M_{\mathcal{B}'_V \mathcal{B}_V})^t A (M_{\mathcal{B}_V \mathcal{B}'_V}) = P^t A P$

Al ser P matriz de cambio de base, es invertible $\Rightarrow$ $\boxed{\exists P \text{ invertible tq } B = P^t A P}$ C.Q.D.

C2 · P invertible $\Rightarrow P^t$ invertible

Dem.: P inv $\Rightarrow rg(P) = n \Rightarrow rg(P^t) = n \Rightarrow P^t$ es invertible

· $A = P^t B P$

$A = Q B P$ con P y Q invertibles (por el res. de arriba)

$\Downarrow$

A y B son equivalentes

$\Downarrow$

$rg(A) = rg(B)$

3) ORTOGONALIDAD

Definición: sea $f: V\times V \to K$ una forma bilineal. f se dice simétrica si:

$$\forall x,y \in V \quad f(x,y) = f(y,x)$$

Ejemplos:

i) $f: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x,y) = x_1y_1 - 2x_1y_2$$
$$f(y,x) = y_1x_1 - 2y_1x_2$$

f no es simétrica

ii) $f: \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$, la forma de Lorentz:

$$f((x_1,y_1,z_1,t_1),(x_2,y_2,z_2,t_2)) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 - c^2t_1t_2$$

ES SIMÉTRICA

Corolario 1: sea $f: V\times V \to K$ una forma bilineal simétrica. Por la propiedad 5,

$\forall x,y \in V$:

i) $f(x+y,x+y) + f(x-y,x-y) = 2\left(f(x,x) + f(y,y)\right)$

ii) $f(x+y,x+y) - f(x-y,x-y) = 4f(x,y)$

$\overset{5)}{=} 2[f(x,y) + f(y,x)] \overset{sim}{=} 2\cdot 2f(x,y) = 4f(x,y)$

iii) $f(x+y,x+y) = 2f(x,y) + f(x,x) + f(y,y)$

$\underset{f\,bil}{=} f(x,x) + f(x,y) + f(y,x) + f(y,y) \underset{f\,sim}{=} 2f(x,y) + f(x,x) + f(y,y)$

Teorema: sea $f: V \times V \to K$ una forma bilineal simétrica y $\mathcal{B}_V$ una base cualquiera de V. Entonces, $M_{\mathcal{B}_V}(f)$ es una matriz simétrica. Es decir:

$$M_{\mathcal{B}_V}(f) = \left(M_{\mathcal{B}_V}(f)\right)^t$$

Lo inverso también es cierto (si una matriz es simétrica, su forma bilineal asociada a cualquier base también)

Definición 4: sea $f: V \times V \to K$ una forma bilineal simétrica. Dos vectores $x, y \in V$ se dicen ortogonales respecto a f si $f(x,y) = 0$

Definición 5: sea f una forma bilineal simétrica. $x \in V$ es isótropo respecto a f si es ortogonal a sí mismo $\longleftrightarrow f(x,x) = 0$

Ejemplo:

$$f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$f(x,y) = 2xy$ bilineal simétrica

Los vectores isótropos son: $f(x,x) = 0$

$$2x \cdot x = 0$$
$$2x^2 = 0$$
$$\boxed{x = 0}$$

Los vectores ortogonales son: $f(x,y) = 0$

$$2xy = 0 < \begin{matrix} x = 0 \\ y = 0 \end{matrix}$$

$f: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$f(x,y) = x_1 y_1 + x_2 y_2$ métrica

¿Isótropos? $f(x,x)=0$

$x_1^2 + x_2^2 = 0$

$\Updownarrow$

$x_1 = x_2 = 0$

$\boxed{x = 0_V}$

¿Ortogonales? $f(x,y)=0$

$\boxed{x_1 y_1 = -x_2 y_2}$

Proposición 6: sea $f: V \times V \to K$ bilineal simétrica, entonces:

1) $x \in V$, x ortogonal a $y_1, \dots, y_K \in V \Rightarrow x$ es ortogonal a cualquier C.L. de ellos.

2) $\{x_1, \dots, x_K\} \in V$, no isótropos y ortogonales dos a dos $\Rightarrow \{x_1, \dots, x_K\}$ es un cjto. libre.

3) $C \subseteq V$, $C^\perp \underset{\uparrow}{=} \{x \in V \mid f(x,y) = 0_K \ \forall y \in C\} \Rightarrow C^\perp$ es un subespacio vectorial, llamado ortogonal / complemento ortogonal de C.

Subcjto., no tiene por qué ser subespacio

Definición del ortogonal de C

4) $C \subseteq V$, $x \in C \cap C^\perp \Rightarrow x$ es isótropo

5) x es isótropo $\Leftrightarrow \langle x \rangle \subseteq \langle x \rangle^\perp$

Demostración:

1) $f(x, y_i) = 0 \ \forall i \in \{1, \dots, K\}$

$\alpha_1, \dots, \alpha_K \in K$ $f(x, \alpha_1 y_1 + \dots + \alpha_K y_K) \underset{f \text{ bilineal}}{=} \alpha_1 \underset{0}{\underbrace{f(x, y_1)}} + \dots + \alpha_K \underset{0}{\underbrace{f(x, y_K)}} = 0$

$\Updownarrow$

x es ortogonal a $\alpha_1 y_1 + \dots + \alpha_K y_K$

2) $\left.\begin{array}{l} \forall i \in \{1, \dots, K\},\ f(x_i, x_i) \neq 0_K \\ \forall i,j \in \{1, \dots, K\},\ i \neq j,\ f(x_i, x_j) = 0_K \end{array}\right\}$ Hipótesis

¿$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_K x_K = 0_V \Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_K = 0$? $\alpha_1, \dots, \alpha_K \in K$; $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_K x_K = 0_V$ Aplicamos $f(-, \dots$

$0_K = f(\underbrace{\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_K x_K}_{=0_V}, x_1) \underset{f \text{ bilineal}}{=} \alpha_1 f(x_1, x_1) + \dots + \alpha_K \underset{f(x_i, x_1) = 0}{\cancel{f(x_K, x_1)}} = \alpha_1 f(x_1, x_1) = 0 \underset{f(x_1,x_1) \neq 0_K}{\Longrightarrow} \alpha_1 = 0_K$

IKASLEEN ERREKTOREORDETZA
VICERRECTORADO DE ALUMNADO

Universidad del País Vasco / Euskal Herriko Unibertsitatea

En general,

$$0_K = f(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_K x_K, x_i) = \alpha_1 f(x_1, x_i) + \dots + \alpha_K f(x_K, x_i) =$$

$$= \alpha_i \underbrace{f(x_i, x_i)}_{x_i \text{ no isótropo}} \Rightarrow \boxed{\alpha_i = 0}$$

3) ¿ $x_1, x_2 \in C^\perp$, $\alpha_1, \alpha_2 \in K$, $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \in C^\perp$?

Sea $y \in C$: $f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y) \underset{f \text{ bilineal}}{=} \alpha_1 \underbrace{f(x_1, y)}_{0_K (x \in C^\perp)} + \alpha_2 \underbrace{f(x_2, y)}_{0_K} = 0_K \Rightarrow \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \in C^\perp$

4) $x \in C$

$x \in C^\perp \Longleftrightarrow \forall y \in C, f(x, y) = 0_K$

$\Downarrow x \in C$

$f(x, x) = 0_K \underset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} x$ es isótropo

5) $\langle x \rangle^\perp = \{ y \in V \mid f(y, z) = 0_K \ \forall z \in \langle x \rangle \}$

Sea $\lambda x \in \langle x \rangle$ ¿ $\lambda x \in \langle x \rangle^\perp$?

$\Updownarrow$

¿ $\forall y \in \langle x \rangle, f(\lambda x, y) = 0_K$?

$\Updownarrow$

¿ $\forall y = \alpha x \in \langle x \rangle$ $(\alpha \in K)$, $f(\lambda x, \alpha x) = 0_K$?

$f(\lambda x, \alpha x) = \lambda \alpha f(x, x) \underset{x \text{ es isótropo}}{=} 0_K$

Ejemplo: forma de Lorentz: $f: \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f((x_1,y_1,z_1,t_1),(x_2,y_2,z_2,t_2)) = x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2-c^2t_1t_2 \quad c\in\mathbb{R}^+$$

¿ Isótropos?

$$f(v,v)= x_1^2+y_1^2+z_1^2-c^2t_1^2=0$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{x_1^2+y_1^2+z_1^2=c^2t_1^2}$$

Si $t_1=0 \Rightarrow x_1^2+y_1^2+z_1^2=0 \Rightarrow v=0_V$

$t_1\neq 0 \Rightarrow x_1^2+y_1^2+z_1^2=c^2t_1^2$

$\downarrow$

t_1 fijo $\neq 0$

$$\Downarrow$$

Esfera centrada en el origen, con radio ct_1

$v=(c,0,0,1)\in\mathbb{R}^4$

$f(v,v)= c^2+0^2+0^2-c^2\cdot 1=0$

$\Downarrow$

v isótropo respecto de f

$W=\{(x,0,0,t) \mid x,t\in\mathbb{R}\}$, subespacio de $\mathbb{R}^4$

Vemos que $v\notin W^\perp$, ya que:

$W^\perp=\{x\in\mathbb{R}^4 \mid f(x,y)=0_K \ \forall y\in W\}$

$f((\underset{\substack{\downarrow\\ v}}{c,0,0,1}),(\underset{\substack{\downarrow\\ \in W}}{x,0,0,t}))=cx-c^2t=c(x-ct)\neq 0$, ya que x y t toman CUALQUIER valor, no siempre $x=ct$

Es decir, 4) no es una doble implicación y 5) solo sirve para subespacios generados

Proposición 7: sea V un K-espacio vectorial y $f: V\times V \to K$ bilineal simétrica. Entonces:

1) $C \subseteq D \Rightarrow D^{\perp} \subseteq C^{\perp}$

2) $C^{\perp} = \langle C \rangle^{\perp}$ → si es ortogonal a vectores, ortogonal a una C.L.

3) $\langle C \rangle \subseteq (C^{\perp})^{\perp}$

Demostración:

1) $\underbrace{C \subseteq D}_{\text{hipótesis}}$ ¿$D^{\perp} \subset C^{\perp}$? $\Leftrightarrow$ ¿$\forall x \in D^{\perp}$ $x \in C^{\perp}$?

Sea $x \in D^{\perp} \Leftrightarrow \forall y \in D, f(x,y) = 0$

$\Downarrow C \subseteq D$ (si se cumple para todos los vectores de D, se cumplirá en particular para los de C)

$\forall z \in C, f(x,z) = 0$

$\Downarrow$

$x \in C^{\perp}$

2) $C = \{v_1, \dots, v_n\}$; $C^{\perp} = \{x \in V \mid \forall v_i \in C\ f(x,v_i) = 0_K\}$

$\langle C \rangle = \langle v_1, \dots, v_n \rangle = \{x \in V \mid x = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n\}$

$\langle C \rangle^{\perp} = \{x \in V \mid \forall (\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n)\ f(x, \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) = 0\}$

Es decir, $x \in \langle C \rangle^{\perp} \Leftrightarrow \forall \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}\ \lambda_1 f(x,v_1) + \dots + \lambda_n f(x,v_n) = 0_K$

$\Uparrow$ Como $f(x,v_i) = 0_K$, cualquier C.L. será también 0

$\Downarrow$ Como se cumple $\forall$, se cumplirá también si escogemos:

- $\lambda_i = 1$ si $f(x,v_i) \geq 0$
- $\lambda_i = -1$ si $f(x,v_i) < 0$

De esta manera, al ser todos los sumandos positivos, que la suma sea 0 implica que ($\lambda_i \neq 0$) todos los $f(x,v_i) = 0$

$\forall v_i \in C\ f(x,v_i) = 0_K$

Es decir:

$$\left.\begin{aligned} &\cdot\ C^{\perp} = \{x \in V \mid \forall v_i \in C\ f(x,v_i) = 0_K\} \\ &\cdot\ \langle C \rangle^{\perp} = \{x \in V \mid \forall v_i \in C\ f(x,v_i) = 0_K\} \end{aligned}\right\} \boxed{C^{\perp} = \langle C \rangle^{\perp}}$$

Demostración:

Sea C un subespacio vectorial de V

$¿C \subseteq (C^{\perp})^{\perp}?$

$¿\forall x \in C,\ x \in (C^{\perp})^{\perp}?$

$¿\forall x \in C,\ (\forall y \in C^{\perp},\ f(x,y)=0)?$

$y \in C^{\perp} \leftrightarrow \forall z \in C,\ f(y,z)=0$

Como $x \in C$, $f(x,y)=0$

$$\downarrow$$

$$x \in (C^{\perp})^{\perp}$$

$$\downarrow$$

$$C \subseteq (C^{\perp})^{\perp}$$

Proposición 8: Sea $f: V \times V \to K$ una forma bilineal simétrica, y W_1 y W_2 subespacios vectoriales de V. Entonces:

i) $(W_1+W_2)^{\perp} = W_1^{\perp} \cap W_2^{\perp}$

ii) $W_1^{\perp} + W_2^{\perp} \subseteq (W_1 \cap W_2)^{\perp}$

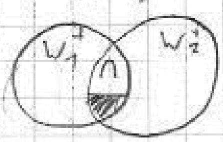
Demostración:

i) $W_1 \subseteq W_1+W_2$, ya que $0_V \in W_2$ por ser W_2 subespacio vectorial. Entonces:

$\forall v \in W_1;\ \underbrace{v}_{\in W_1} = \underbrace{\underbrace{v}_{\in W_1} + \underbrace{0_V}_{\in W_2}}_{\in W_1+W_2} \underset{\text{Prop. 7}}{\Longrightarrow} (W_1+W_2)^{\perp} \subseteq W_1^{\perp}$

De la misma manera, $W_2 \subset W_1+W_2 \underset{\text{Prop. 7}}{\Longrightarrow} (W_1+W_2)^{\perp} \subseteq W_2^{\perp}$

$$\Bigg\}\ \boxed{(W_1+W_2)^{\perp} \subseteq W_1^{\perp} \cap W_2^{\perp}}$$



$¿(W_1^\perp \cap W_2^\perp) \subseteq (W_1+W_2)^\perp?$

Sea $x \in W_1^\perp \cap W_2^\perp \underset{\text{def.}}{\iff} \forall y \in W_1, z \in W_2 \quad f(x,y)=0=f(x,z)$

Sea $w \in W_1+W_2 \to w = y_1+y_2 \quad , y_i \in V_i$

$f(x,w)=f(x,y_1+y_2) \underset{f \text{ bilin}}{=} \underbrace{f(x,y_1)}_{\substack{= 0 \\ \text{pq } x\in W_1^\perp}} + \underbrace{f(x,y_2)}_{\substack{= 0 \\ \text{pq } x\in V_2^\perp}} = 0 \Rightarrow x \in (W_1+W_2)^\perp$

pq $x \in W_1^\perp \cap V_2^\perp$

~~$W_1 \cap W_2$~~

$\Downarrow$

$W_1^\perp \cap W_2^\perp \subseteq (W_1+V_2)^\perp$

$W_1^\perp \cap W_2^\perp \subseteq (W_1+W_2)^\perp$

$\Downarrow$

$\boxed{(W_1+W_2)^\perp = W_1^\perp \cap W_2^\perp}$

ii) $¿W_1^\perp + W_2^\perp \subseteq (W_1 \cap W_2)^\perp?$

$W_1 \cap W_2 \subseteq W_1 \underset{\text{Prop. 7}}{\Longrightarrow} W_1^\perp \subseteq (W_1 \cap W_2)^\perp$

$W_1 \cap W_2 \subseteq W_2 \Longrightarrow W_2^\perp \subseteq (W_1 \cap W_2)^\perp$

($W_1^\perp$ y $V_2^\perp$ son subespacios)

$\Longrightarrow \boxed{W_1^\perp + W_2^\perp \subseteq (W_1 \cap W_2)^\perp}$

[illegible] $(W_1 \cap W_2)^\perp$ es subespacio [illegible]

Así que una C.L. cae en el subespacio

Proposición 9: sea $f: V \times V \to K$ una forma bilineal simétrica, de rango r $\begin{cases} \mathcal{B}_V \text{ base elegida} \\ A_{\mathcal{B}_V} \text{ de rango } r \end{cases}$

$$\dim V^\perp = \dim V - r$$

A $V^\perp$ se le llama núcleo de f

Demostración:

$$A_{\mathcal{B}_V} = \begin{pmatrix} f(v_1, v_1) & \cdots & f(v_1, v_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f(v_n, v_1) & \cdots & f(v_n, v_n) \end{pmatrix}$$

$$x \in V^\perp \iff \forall y \in V,\ f(x,y) = 0$$

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i \quad (x_i \in K), \text{ ya que } \{v_1, \dots, v_n\} = \mathcal{B}_V \text{ es base}$$

Al ser f bilineal y $\mathcal{B}_V$ base, si x anula a cualquier vector de la base, anulará a cualquier vector de V (C.L. de vectores de $\mathcal{B}_V$):

Por 7.2, $x \in \mathcal{B}_V^\perp \iff x \in \langle \mathcal{B}_V \rangle^\perp \iff x \in V^\perp$ ($\langle \rangle^\perp = \langle \rangle^\perp$)

$x \in V^\perp \iff \forall v_j \ (1 \le j \le n),\ f(x, v_j) = 0 \iff$ (f bilineal y $\mathcal{B}_V$ base)

$\iff \forall j \in \{1, \dots, n\},\ \sum_{i=1}^{n} x_i f(v_i, v_j) = 0 \iff \forall j \in \{1, \dots, n\}\ \sum_{i=1}^{n} x_i f(v_j, v_i) = 0$

Sist. de n ecuaciones con $\underbrace{n \text{ incógnitas}}_{x_i}$ homogéneo, cuya matriz asociada es $A_{\mathcal{B}_V}$

$\Downarrow$

Su solución define un subespacio vectorial de dimensión $n - rg(A_{\mathcal{B}_V})$

$\Downarrow$

$\dim V$

Ojo, $V^\perp$ es el subespacio obtenido al resolver el sistema homogéneo cuya matriz asociada es $A_{\mathcal{B}_V}$

$$\dim V^\perp = \dim V - r$$

4- FORMAS NO DEGENERADAS

Definición 6: $f: V\times V \to K$ bilineal simétrica se llama no degenerada si $V^{\perp} = \{0_V\}$

Ejemplo:

forma de Lorentz: $f: \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f((x_1, y_1, z_1, t_1), (x_2, y_2, z_2, t_2)) \to x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 - c^2 t_1 t_2$$

$c \in \mathbb{R}^+$

$$\mathcal{B}_c = \{(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)\}$$

$$x \in (\mathbb{R}^4)^{\perp},\ f(x,y) = 0,\ \forall y \in \mathbb{R}^4$$

$$\Updownarrow \quad (x = (x_1, y_1, z_1, t_1))$$

1) $f(x, (1,0,0,0)) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$

2) $f(x, (0,1,0,0)) = 0 \Leftrightarrow y_1 = 0$

3) $f(x, (0,0,1,0)) = 0 \Leftrightarrow z_1 = 0$

4) $f(x, (0,0,0,1)) = 0 \Leftrightarrow c^2 t_1 = 0 \overset{c\neq 0}{\Longleftrightarrow} t_1 = 0$

$$\Downarrow$$

$$x = (0,0,0,0)$$

$$\Downarrow$$

$$(\mathbb{R}^4)^{\perp} = \{0_V\}$$

$$\Downarrow$$

La forma de Lorentz es no degenerada

Pero, por la prop. 9:

$$\dim (\mathbb{R}^4)^\perp = \dim \mathbb{R}^4 - rg(A_{\mathcal{B}_V})$$

Como $A_{\mathcal{B}_V} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c^2 \end{pmatrix}$

$$|A_{\mathcal{B}_V}| = -c^2 \neq 0 \Rightarrow rg(A_{\mathcal{B}_V}) = 4$$

$$\dim (\mathbb{R}^4)^\perp = 4 - 4 = 0 \Leftrightarrow (\mathbb{R}^4)^\perp = \{0_V\}$$

Proposición 10: $f: V \times V \to K$ bilineal simétrica

f es no degenerada $\Longleftrightarrow$ $A_{\mathcal{B}_V}$ es invertible

$\Updownarrow$

$rg(A_{\mathcal{B}_V}) = \dim V$

prop. 9

Corolario: f es no degenerada $\leftrightarrow rg(f) = rg(A_{\mathcal{B}_V}) = \dim V$

Prop. 11: sea $f: V \times V \to K$ bilineal simétrica no degenerada, y W un subespacio vectorial de V. Entonces:

1) $\dim V = \dim W + \dim W^\perp$

2) $(W^\perp)^\perp = W$

Demostración:

i)

$\dim V = n$

$\dim W = m \leq n$

Sea $\mathcal{B}_W = \{v_1, \dots, v_m\}$ una base de W. Completamos hasta obtener una base de V: $\mathcal{B}_V = \{v_1, \dots, v_m, v_{m+1}, \dots, v_n\}$

Por definición, $x \in W^\perp \longleftrightarrow \forall y \in W, f(x,y) = 0$

Como W es subespacio y $\mathcal{B}_W$ es base: $f(x, \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m) = 0$

De esta manera, $x \in W^\perp \longleftrightarrow \forall j \in \{1, \dots, m\}\ f(x, v_j) = 0$

por ser f bilineal, $\longleftrightarrow x \in \langle \mathcal{B}_W \rangle^\perp \longleftrightarrow x \in \mathcal{B}_W^\perp$

$W = \langle \mathcal{B}_W \rangle$; $c^t = cx^t$

Como $x \in V$, es C.L. de vectores de $\mathcal{B}_V$: $x = \sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i$

Es decir, como f es bilineal:

$$x \in W^\perp \longleftrightarrow \underbrace{\forall j \in \{1, \dots, m\}, \sum_{i=1}^{n} \beta_i f(v_i, v_j) = 0}$$

Sist. homogéneo de m ecuaciones con n incógnitas (buscamos β_i, tenemos v_j datos)

β_i → incógnitas ; datos → v_j

Matriz asociada → rango m

Subespacio solución → $\boxed{\text{dimensión } n-m}$

Así, $\dim W^{\perp} = n-m$

$$\dim W^{\perp} + \dim W = n-m+m = n = \dim V$$

ii) Por la prop. 7 → $C \subseteq V \Longrightarrow C \subseteq (C^{\perp})^{\perp}$

$\hookrightarrow C \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Escalares } 1/0}}{\subseteq} \langle C \rangle \subseteq (C^{\perp})^{\perp} \underset{\substack{\downarrow \\ \subseteq \text{ rel. orden}}}{\Longrightarrow} C \subseteq (C^{\perp})^{\perp}$

Así, $W \subseteq (W^{\perp})^{\perp}$

por 1), $\dim (W^{\perp})^{\perp} = \dim V - \dim (W^{\perp})$

por 1), $\dim (W^{\perp}) = n-m = \dim V - m$

Así, $\dim (W^{\perp})^{\perp} = \dim V - \dim V + m = m = \dim W$

Así, como $\underbrace{W \subseteq (W^{\perp})^{\perp}}_{\text{Subespacios}}$ y $\dim W = \dim (W^{\perp})^{\perp} \Longrightarrow \boxed{W = (W^{\perp})^{\perp}}$

Observación: $f: V \times V \to K$ bilineal simétrica. Entonces:

$\nexists$ vectores isótropos no nulos $\Longrightarrow$ f no degenerada
$\not\Longleftarrow$

Demostración: (Demostramos que f degenerada $\Longrightarrow \exists v$ isótropos no nulos)

$\Longrightarrow$) Reducción al absurdo: supongamos que $\nexists$ vectores isótropos no nulos y f es degenerada. Por esto último, $\exists v \neq 0_V$, $v \in V^{\perp} \Longleftrightarrow \exists v \neq 0_V$, $\forall w \in V \; f(v,w) = 0_K$

Pero como $v \in V$, $f(v,v) = 0_V \to \underline{v \text{ es isótropo}} \to$ ABSURDO (contra hipótesis)

$\Downarrow$

f no degenerada

Damos un contraejemplo: la forma de Lorentz:

$$f : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f((x_1, y_1, z_1, t_1), (x_2, y_2, z_2, t_2)) = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 - c^2 t_1 t_2 \quad (c \in \mathbb{R}^+)$$

Es no degenerada, pero, por ejemplo $(c, 0, 0, 1)$ es un vector isótropo no nulo.

Proposición 12: Si f es una forma bilineal y simétrica y W un subespacio de V; entonces son equivalentes:

i) $W \cap W^\perp = \{0_V\}$

ii) $f|_{W \times W}$ es no degenerada

iii) $V = W \oplus W^\perp$

Corolario: f no degenerada $\Longrightarrow V = W \oplus W^\perp$

Nota: $W_1 \oplus W_2$ significa:

$$v \in W_1 \oplus W_2 \longleftrightarrow \exists\, w_1 \in W_1, w_2 \in W_2 \text{ tq } v = w_1 + w_2$$

Y, además, $W_1 \cap W_2 = \{0_V\}$

Y w_1, w_2 son únicos

5- BASES ORTOGONALES

Definición 7: sea V un K-espacio vectorial y $f: V \times V \to K$ una forma bilineal simétrica.
Sea $\mathcal{B}_V = \{v_1, \dots, v_n\}$ base de V.

$\mathcal{B}_V$ se dice ortogonal si $\forall i \neq j$; $i, j \in \{1, \dots, n\}$ $f(v_i, v_j) = 0$

Es decir:

* La imagen de cualquier par de elementos de la base es 0.
* Los vectores de la base son ortogonales dos a dos.

Y si, además, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ $f(v_i, v_i) = 1$, $\mathcal{B}_V$ se llama ortonormal

Ejemplos:

i) $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $f(x, y) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$

La base canónica es ortonormal:

$$\mathcal{B}_C = \{\underset{v_1}{(1, 0, \dots, 0)}, \underset{v_2}{(0, 1, 0, \dots, 0)}, \dots, \underset{v_n}{(0, \dots, 1)}\}$$

$i \neq j$, $f(v_i, v_j) = 0$ (todos los productos 0)

$f(v_i, v_i) = 1$ (el producto $x_i y_i = 1$)

ii) $f: \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R} \to$ forma de Lorentz

$\mathcal{B}_C = \{(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)\}$ es una base ortogonal

(ojo!, no ortonormal $\to f(v_4, v_4) = -c^2 \neq 1$)

$k \neq 0$

Definición: sea K un cuerpo. K se dice que tiene característica $= 2$ si $\exists k \in K$ tq $2k = 0_K$. Se dice que tiene característica $\neq 2$ si ocurre lo contrario ($\nexists k \neq 0$)

Proposición 13: sea V un e.v. sobre K, de característica $\neq 2$. Sea $f: V \times V \to K$ forma bilineal simétrica. Entonces, existe una base ortogonal respecto de f.

Demostración: si $f \equiv 0$, cualquier base es ortogonal. Si $f \neq 0$:

Por inducción:

1) $\dim V = 1$. Tomamos una base $\mathcal{B}_V$ con un único vector. Por tanto, se cumple la definición 7 (para cualquier pareja, que no hay, $f(v_i, v_j) = 0_K$)

2) Supongamos que si $\dim V = n-1$, $\exists \mathcal{B}_V$ ortogonal asociada a f.

3) Sea V, de $\dim(V) = n$

$f \neq 0 \Longrightarrow \exists$ al menos un vector no isótropo

Por reducción al absurdo:

Si todos los vectores fueran isótropos, $\forall v \in V: f(v,v) = 0$

Por el corolario 1 de la parte 3, $\forall v, w \in V$ $2f(v,w) =$

$$= \underbrace{\underset{=0}{f(v+w, v+w)} + \underset{=0}{f(v,v)} - \underset{=0}{f(w,w)}}_{\text{Todos los vectores son isótropos}}$$

$\Downarrow$

$\forall v, w \in V,\ 2f(v,w) = 0$

$\Downarrow$ K de característica $\neq 2$

$\forall v, w \in V,\ f(v,w) = 0 \Rightarrow f \equiv 0 \Rightarrow$ ABSURDO (ya que $f \neq 0$)

Sea, entonces, $v_1 \in V$ un vector no isótropo. Se verifica (prop. 12):

$$V = \langle v_1 \rangle \oplus \langle v_1 \rangle^{\perp}$$

Demostración:

$*$ $\langle v_1 \rangle \cap \langle v_1 \rangle^{\perp} = 0_V$: red. al absurdo

si $\exists x \neq 0 \in \langle v_1 \rangle \cap \langle v_1 \rangle^{\perp}$:

1) $x = \lambda v_1,\ \lambda \in K\ (\lambda \neq 0)$

2) $f(v_1, x) = 0;\ f(v_1, \lambda v_1) = 0;\ \lambda f(v_1, v_1) = 0$

$\Downarrow \lambda \neq 0$

$f(v_1, v_1) = 0$

$\Downarrow$

v_1 es isótropo

$\Downarrow$

v_1 no es isótropo!!

$\Downarrow$

$\langle v_1 \rangle \cap \langle v_1 \rangle^{\perp} = 0_V$

$*$ $\forall v \in V,\ v = \underset{\in \langle v_1 \rangle}{w_1} + \underset{\in \langle v_1 \rangle^{\perp}}{w_2}$

$v \in V$

$x = v - \dfrac{f(v, v_1)}{f(v_1, v_1)} v_1$ (puedo dividir pq v_1 no es isótropo)

$f(v_1, x) = f(v_1, v) - \dfrac{f(v, v_1)}{\cancel{f(v_1, v_1)}} \cancel{f(v_1, v_1)} = 0$

f simétrica

v_1 no isótropo

$\Downarrow$

$x \in \langle v_1 \rangle^{\perp}$

Así, $v = \underbrace{\dfrac{f(v, v_1)}{f(v_1, v_1)} v_1}_{\in \langle v_1 \rangle (= \lambda v_1)} + \underbrace{x}_{\in \langle v_1 \rangle^{\perp}}$

DEMOSTRADO

Como $V = \underbrace{<v_1>}_{\dim 1} \oplus \underbrace{<v_1>^{\perp}}_{\dim n-1}$

$\dim 1 \Rightarrow \dim n-1$

Por la hipótesis 2), $\exists\ \mathcal{B} = \{v_2, \dots, v_n\}$ ortogonal, base de $<v_1>^{\perp}$

Entonces, $\mathcal{B}_V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es una base ortogonal de V, ya que v_1 es ortogonal a $\{v_2, \dots, v_n\}$ por ser los vectores de la base $\in <v_1>^{\perp}$.

Es decir, por inducción, para toda forma bilineal simétrica, existe una base ortogonal respecto de f.

<u>Corolario</u>: sea $f: V \times V \to K$ una forma bilineal simétrica. Sea $\mathcal{B}_V$ una base ortogonal respecto de f.

Entonces, $A_{\mathcal{B}_V}$ es una matriz diagonal (en la diagonal puede haber ceros)

Como $\forall i \neq j\ f(v_i, v_j) = 0$

$\Downarrow$

$\left(rg(A_{\mathcal{B}_V}) = n - \dim(V^{\perp}) \right)$

Esto ocurre para cualquier matriz

$\Downarrow$

$\dim(V^{\perp}) =$ nº de ceros en la diagonal

$\Downarrow$

$V^{\perp}$ está generado por los $\underbrace{\text{vectores isótropos}}_{f(v_i, v_i) = 0}$ de una base ortogonal

$\downarrow$

v_i isótropo

CAE EN EL EXAMEN:

Corolario 3: sea V un e.v. sobre K (característica $\neq 2$) y $f: V \times V \to K$ una forma bilineal simétrica. Entonces:

f es no degenerada $\Leftrightarrow$ cualquier base ortogonal está formada por vectores no isótropos

$\Downarrow$

$\exists$ base ortonormal

Demostración:

f no degenerada $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} V^{\perp} = \{0_V\}$

Sea f bilineal simétrica y $\mathcal{B}_V$ una base ortogonal

f no degenerada $\Leftrightarrow rg(A_{\mathcal{B}_V}) = \dim V = n \Leftrightarrow f(v_i, v_i) \neq 0 \ \forall v_i \in \mathcal{B}_V$

$\Downarrow$

v_i no es isótropo

Entonces, si $\frac{1}{\sqrt{f(v_i, v_i)}} v_i = w_i$ → se divide porque $f(v_i, v_i) \neq 0$

$$f(w_i, w_i) = f\left(\frac{v_i}{\sqrt{f(v_i, v_i)}}, \frac{v_i}{\sqrt{f(v_i, v_i)}}\right) = \frac{1}{f(v_i, v_i)} f(v_i, v_i) = 1$$

La base formada por w_i es ortonormal.

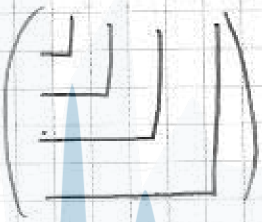
Ortogonalización de Gram-Schmidt

Proposición 14: sea V un K-espacio vectorial de dimensión n, $\mathcal{B}_V=\{v_1,\dots,v_n\}$ una base y $f: V\times V\to K$ una forma bilineal simétrica.

Si $A_{\mathcal{B}_V}$ tiene todos sus menores principales no nulos, entonces queda definida una base ortogonal de vectores no isótropos $\mathcal{B}'_V=\{w_1,\dots,w_n\}$ por:

$$w_1=v_1$$
$$w_k=v_k+\lambda_k^1 w_1+\dots+\lambda_k^{k-1}w_{k-1},\quad \lambda_k^i\in K$$

Menores ppales de una matriz cuadrada: $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k}\\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk}\end{vmatrix}$



Demostración: (Inducción)

- $w_1=v_1 \Rightarrow$ No isótropo pq $f(v_1,v_1)=|a_{11}|\neq 0$ (por hipótesis todos los menores principales, y éste es el primero, son no nulos)

- Supuesto que hemos elegido $\{w_1,\dots,w_{k-1}\}$ dos a dos ortogonales y no isótropos.

Si $w_k=v_k+\lambda_k^1 w_1+\dots+\lambda_k^{k-1}w_{k-1}$

los λ_k^i se obtienen imponiendo la ortogonalidad. P.ej., λ_k^1:

$$0=f(w_k,w_1)\overset{f\text{ bilineal}}{=}f(v_k,w_1)+\lambda_k^1\underbrace{f(w_1,w_1)}_{\neq 0\text{ ya que }w_1\text{ no es isótropo}}+\underbrace{\lambda_k^2 f(w_2,w_1)+\dots+\lambda_k^{k-1}f(w_{k-1},w_1)}_{=0\text{ (ya que }\{w_1,\dots,w_{k-1}\}\text{ son ortogonales 2 a 2)}}$$

ó $\boxed{\lambda_k^1=-\dfrac{f(v_k,w_1)}{f(w_1,w_1)}}$

Se probaría (pq. los menores son no nulos) que los w_i son no isótropos.

6-LEY DE INERCIA

$K = \mathbb{R}$

$f: V \times V \to \mathbb{R}$ bilineal simétrica

$x \in V$, hay 3 posibilidades $\begin{cases} f(x,x)=0 \\ f(x,x)>0 \\ f(x,x)<0 \end{cases}$

Proposición 15 (ley de inercia): sea $f: V \times V \to \mathbb{R}$ bilineal simétrica y $\mathcal{B}_V$, $\mathcal{B}'_V$ dos bases ortogonales para f.

Entonces, si llamamos:

1) r_1 al nº de entradas positivas en la diagonal principal de $A_{\mathcal{B}_V}$
r'_1 al nº de entradas positivas en la diagonal principal de $A_{\mathcal{B}'_V}$

2) s_1 al nº de entradas negativas en la diagonal principal de $A_{\mathcal{B}_V}$
s'_1 al nº de entradas negativas en la diagonal principal de $A_{\mathcal{B}'_V}$

3) t_1 al nº de entradas nulas en la diagonal principal de $A_{\mathcal{B}_V}$
t'_1 al nº de entradas nulas en la diagonal principal de $A'_{\mathcal{B}_V}$

Se cumple $\begin{cases} r_1 = r'_1 \\ s_1 = s'_1 \\ t_1 = t'_1 \end{cases}$

Definición 8: sea $f: V \times V \to \mathbb{R}$ bilineal simétrica. La signatura de f se define como el par (r,s) donde r es el nº de entradas positivas (y s el nº de entradas negativas) en la diagonal principal de cualquier matriz asociada a una base ortogonal.

Corolario: f es no degenerada $\Leftrightarrow r+s=n \Leftrightarrow V^{\perp}=\{0_V\} \Leftrightarrow A_{\mathcal{B}_V}$ invertible $\Leftrightarrow rg(A_{\mathcal{B}_V})=n$

Donde $\begin{cases} sig(f)=(r,s) \\ \dim V=n \end{cases}$

Corolario: $\left.\begin{array}{l} sig(f)=(r,s) \\ t=\text{nº de entradas nulas} \\ n=\dim V \end{array}\right\} r+s+t=n$; $\boxed{\dim V = rg(f)+t}$

Teorema: $\forall A$ simétrica $(n\times n)$ es congruente a una matriz diagonal.

Demostración: $A \in Mat_{n\times n}(K)$ simétrica

$\Downarrow$

$\exists f: V\times V \to K$ bilineal simétrica tq $A=A_{\mathcal{B}_V}$ ($\mathcal{B}_V$ una base)

$\Downarrow$ Prop. 13

$\exists \mathcal{B}'_V$ base ortogonal para f

$\Downarrow$

$A_{\mathcal{B}'_V}$ es diagonal

$\Downarrow$ Asociadas a una forma bilineal

$A_{\mathcal{B}_V}$ y $A_{\mathcal{B}'_V}$ son congruentes

Definición: sea $A \in Mat_{n\times n}(K)$ simétrica. Se define la signatura de A como (r,s), donde r es el nº de entradas positivas y s el de negativas en la diagonal principal de cualquier matriz diagonal congruente con A.

Ejemplos:

1) Forma de Lorentz:

$f: \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \xrightarrow{f} \mathbb{R}$

$f((x_1, y_1, z_1, t_1), (x_2, y_2, z_2, t_2)) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 - c^2 t_1 t_2$

$\mathcal{B}_c = \{(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)\}$; $A_{\mathcal{B}_c} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c^2 \end{pmatrix}$

$sig(f) = (3,1) \rightarrow rg(f) = 3+1 = 4$

2) Producto escalar:

$f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}$

$f((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$

$\mathcal{B}_v = \{v_1, \dots, v_n\}$, $v_i = (0, \dots, \underset{i}{1}, 0, \dots 0) \Rightarrow$ Base canónica $\rightarrow$ Ortonormal

$A_{\mathcal{B}_v} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$, $sig(f) = (n,0) \rightarrow rg(f) = n+0 = n$

~~Definición 9: sea $f: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ bilineal simétrica. f se dice :~~

~~1) Definida positiva: $\forall x \in V$, $f(x,x) \geq 0$~~

~~2) Definida negativa: $\forall x \in V$, $f(x,x) \leq 0$~~

Ejemplos: la forma de Lorentz no es ni definida positiva ni definida negativa.
el producto escalar es definido negativo.

Definición 9: una forma bilineal simétrica $f: V \times V \to \mathbb{R}$ se llama:

1) Semidefinida positiva: si $\forall x \in V$, $f(x,x) \geq 0$

2) Semidefinida negativa: si $\forall x \in V$, $f(x,x) \leq 0$

3) Definida positiva: si $\forall x \neq 0_V$, $f(x,x) > 0$

4) Definida negativa: si $\forall x \neq 0_V$, $f(x,x) < 0$

Análogamente, si A es una matriz simétrica real, se llama:

1) Semidefinida positiva: si $\forall X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $X^t A X \geq 0$

2) Semidefinida negativa: si $\forall X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $X^t A X \leq 0$

3) Definida positiva: si $\forall X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ $X^t A X > 0$

4) Definida negativa: si $\forall X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ $X^t A X < 0$

7- FORMAS CUADRÁTICAS

Definición 10: sea $f: V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal simétrica. La forma cuadrática ψ asociada a f es:

$$\psi : V \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\psi(x) = f(x,x)$$

Proposición 16: en las condiciones anteriores:

i) $\psi(0_V) = 0$

ii) $\psi(\alpha x) = \alpha^2 \psi(x)$ $(\Longrightarrow \psi$ no es lineal$)$

iii) $\psi(-x) = \psi(x)$

iv) $\psi(x+y) = \psi(x) + \psi(y) + 2f(x,y)$

Demostración:

i) $\psi(0_V) = f(0_V, 0_V) = 0$ por ser f bilineal

ii) $\psi(\alpha x) = f(\alpha x, \alpha x) \overset{f \text{ bilineal}}{=} \alpha^2 f(x,x) = \alpha^2 \psi(x)$

iii) $\psi(-x) \overset{\text{ii)}}{=} (-1)^2 \cdot \psi(x) = \psi(x)$

iv) $\psi(x+y) = f(x+y, x+y) \overset{f \text{ bilineal}}{=} f(x,x) + f(x,y) + f(y,x) + f(y,y) = \psi(x) + \psi(y) + 2f(x,y)$

Sea $\mathcal{B}_V = \{v_1, \dots, v_n\}$ $\quad x = (x_1, \dots, x_n)$

$$\psi(x) = f(x,x) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i\, x_j\, f(v_i, v_j)$$

Si $\mathcal{B}_V$ es ortogonal ($\forall\, i \neq j \quad f(v_i, v_j) = 0$):

$$\psi(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot x_i\, f(v_i, v_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2\, \psi(v_i)$$