ESPACIOS AFINES

$\mathbb{R}^n$ es espacio vectorial

tiene formas bilineales
simétricas
positivas
no degeneradas } producto escalar } espacio vectorial euclídeo

Definición: un espacio afín es un conjunto no vacío A, a cuyos elementos llamamos puntos, con una aplicación:

$$\theta : A \times A \longrightarrow V$$

, donde V es un espacio vectorial, que satisface:

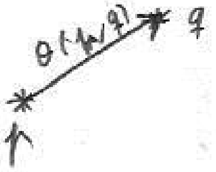
1) $\forall p, q, r \in A \quad \theta(p,q) + \theta(q,r) = \theta(p,r)$

2) $\forall p \in A, \forall v \in V \ \exists!\, q \in A$ tq $\theta(p,q) = v$

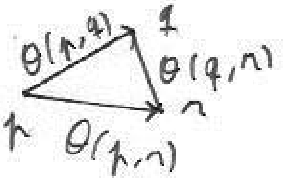
A $\theta(p,q) \in V$ se le llama: vector de origen p y extremo q
" que une p con q

V se denomina espacio vectorial subyacente de A.

A dos puntos, p y q, se les asocia un vector:

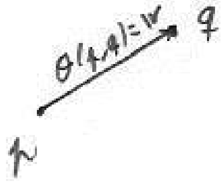


Por 1):



→ Suma geométrica de vectores

2):



Normalmente, se ve $\theta(p,q)$ escrito como $\overrightarrow{pq}$

Definición: sea A un espacio afín y V un espacio vectorial subyacente.
Si V es finitamente generado, se le llama dimensión de A a $\dim(V)$

Casos particulares:

- $\dim A = 0 \Rightarrow V = \{0_V\} \Rightarrow A = \{p\}$, un único punto.
- $\dim A = 1 \Rightarrow V = \{\lambda w \mid \lambda \in \mathbb{R};\ w \neq 0_V\}$ recta vectorial $\Rightarrow A$ se denomina recta afín
- $\dim A = 2 \Rightarrow V = \{\lambda w_1 + \mu w_2 \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R};\ w_1 \text{ y } w_2 \text{ L.I.}\}$ plano vectorial $\Rightarrow A$ se denomina plano afín.

Consecuencias:

① Si fijamos $o \in A$:

$$\begin{aligned} \theta_o : A &\longrightarrow V \\ q &\longrightarrow \theta(o,q) = \vec{oq} \end{aligned}$$

es una aplicación biyectiva (consecuencia de 2))

Es decir, fijado un origen, a cada punto le corresponde un único vector, y a cada vector un único punto.

② $\forall p \in A, \quad \theta(p,p) = 0_V$

③ $\forall p, q \in A, \quad \theta(p,q) = -\theta(q,p)$

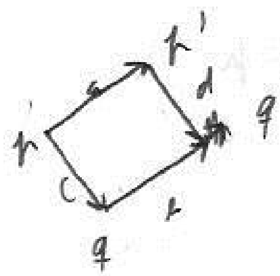
④ ley del paralelogramo:

$\forall p, p', q, q' \in A$

$$\theta(p,p') = \theta(q,q') \Longleftrightarrow \theta(p,q) = \theta(p',q')$$

$\theta(p,q) = 0 \Leftrightarrow p = q$

④ dice:



a y b son iguales si y sólo si c y d son iguales

Demostración:

(2) Aplicamos la propiedad 1 con $p=q=r$:

$$\theta(p,p)+\theta(p,p)=\theta(p,p)$$
$$2\theta(p,p)=\theta(p,p)$$
$$2\theta(p,p)-\theta(p,p)=\theta(p,p)-\theta(p,p)$$
$$\theta(p,p)=0_V$$

(3) Aplicamos la propiedad 1 con $r=p$:

$$\theta(p,q)+\theta(q,p)=\theta(p,p)\overset{(2)}{=}0_V$$
$$\theta(p,q)+\theta(q,p)=0_V$$
$$\theta(p,q)+\theta(q,p)-\theta(q,p)=-\theta(q,p)$$
$$\theta(p,q)=-\theta(q,p)$$

(4) Por la propiedad 1:

$$\theta(p,q')=\begin{cases}\theta(p,p')+\theta(p',q')\\ \theta(p,q)+\theta(q,q')\end{cases}$$

- Se coge el vector que no aparece: $\overrightarrow{pq'}$
- Se descompone de dos maneras diferentes (con p' y q', los puntos que no hemos usado)
- Se igualan las dos descomposiciones
- Se resta lo que quieras para tener =

Así, $\theta(p,p')+\theta(p',q')=\theta(p,q)+\theta(q,q')$

- $v=0 \Leftrightarrow w=0$

$$\underbrace{\theta(p,p')-\theta(q,q')}_{v}=\underbrace{\theta(p,q)-\theta(p',q')}_{w}$$

$$v=0_V \Leftrightarrow w=0_V$$

$$\theta(p,p')-\theta(q,q')=0_V \Leftrightarrow \theta(p,q)-\theta(p',q')=0_V$$

$$\theta(p,p')=\theta(q,q') \Leftrightarrow \theta(p,q)+\theta(p',q')$$

C.Q.D.

Ejemplos de espacios afines:

(A) Cualquier espacio vectorial es un espacio afín sobre sí mismo. La aplicación θ es:

$$\theta: V \times V \longrightarrow V$$
$$(u, v) \longmapsto \theta(u, v) = v - u$$

θ satisface:

- Es aplicación (la diferencia, que en fondo una suma, es una aplicación bien definida).

- $\theta(p, q) + \theta(q, r) = \theta(p, r)$:

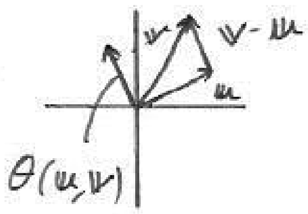
$$\underbrace{(v-u)}_{\theta(u,v)} + \underbrace{(w-v)}_{\theta(v,w)} = w - u = \theta(u, w)$$

- $\forall u \in V, \forall v \in V, \exists! w \in V, \theta(u, w) = v$

$$w - u = v$$

$w = u + v$, que existe y es único al ser la suma una aplicación bien definida en V

En $\mathbb{R}^2$, esto es:



(B) Sean A_1 y A_2 espacios afines sobre V_1 y V_2, respectivamente

Entonces, $A_1 \times A_2$ es un espacio afín sobre $V_1 \times V_2$

$$\theta : (A_1 \times A_2) \times (A_1 \times A_2) \longrightarrow V_1 \times V_2$$
$$((p_1, p_2), (q_1, q_2)) \longrightarrow (\theta_1(p_1, q_1), \theta_2(p_2, q_2))$$

Siendo θ_1 y θ_2 las aplicaciones que caracterizan los espacios afines A_1 y A_2, respectivamente.

(C) Sea $A \in Mat_{n\times m}(\mathbb{R})$ y $\mathbb{b} = \begin{pmatrix} b^1 \\ \vdots \\ b^n \end{pmatrix}$. Con esto, se puede definir el sistema de ecuaciones:

$$A \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^1 \\ \vdots \\ b^n \end{pmatrix}$$, sistema de n ecuaciones con m incógnitas

Entonces, si el sistema es compatible, el conjunto de soluciones es un espacio afín, con:

- V el espacio de soluciones de $A \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ (el correspondiente sistema homogéneo)

- $\theta : A \times A \longrightarrow V$
$$\left(\begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^m \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z^1 \\ \vdots \\ z^n \end{pmatrix} \right) \longrightarrow \begin{pmatrix} y^1 - z^1 \\ \vdots \\ y^n - z^n \end{pmatrix}$$

El otro día vimos que:

Fijado $o \in A$, $\theta_o : A \longrightarrow V$ es biyectiva
$$p \longrightarrow \theta(o,p)$$

Por lo tanto, existe la inversa:

$$\theta_o^{-1} : V \longrightarrow A$$
$$v \longrightarrow q \,/\, \theta_o(q) = v$$

A este punto q se suele denotar: $q = \theta_o^{-1}(v) = o + v$

↓ ojo, esto es una notación, no tiene sentido sumar puntos y vectores

Según esta notación, la suma de un vector y un punto es un punto

$$\boxed{q = o + v \Leftrightarrow v = \overrightarrow{oq}}$$

Así, definimos la suma de un punto y un vector:

$$+ : A \times V \longrightarrow A$$
$$(o, v) \longrightarrow o + v$$

$o + v = \theta_o^{-1}(v)$

$\theta(o, o+v) = v$

que satisface:

1) $(o + v) + w = o + (v + w)$

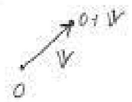
2) $\forall p, q \in A \ \exists! \ v \in V$ tq $p + v = q$; $v = \overrightarrow{pq}$ (4)

3) $\overrightarrow{(p+v)(q+w)} = \overrightarrow{pq} + w - v$

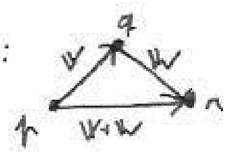
4) $\forall p, q \in A \quad p + \overrightarrow{pq} = q$

· Cuando hago $p = o + v$, tengo que ver $\overrightarrow{op} = v$ ("el p se ve desde o"): $p = o + v \Leftrightarrow \overrightarrow{op} = v$

· Gráficamente tiene es muy intuitivo



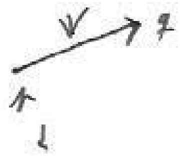
1):



↓

Es la prop. 1) de espacios afines

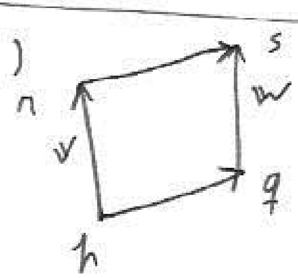
2):



↓

Prop. 2) de espacios afines

3)



Se descompone mediante p y q

Demostración 3):

$$p + v = r \Leftrightarrow \overrightarrow{pr} = v$$

$$q + w = s \Leftrightarrow \overrightarrow{qs} = w$$

$$\overrightarrow{rs} \underset{\text{Prop. 1 de afines}}{=} \overrightarrow{rp} + \overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qs} = -v + \overrightarrow{pq} + w = \overrightarrow{pq} + w - v \qquad \text{C.Q.D.}$$

La notación de suma es muy útil. Recordemos que todo espacio vectorial V, con la aplicación:

$$\begin{aligned} \theta : V \times V &\longrightarrow V \\ (x, y) &\longrightarrow y - x \end{aligned}$$

es un espacio afín sobre V.

Fijado un vector $x_0 \in V$:

$$\begin{aligned} \theta_{x_0} : V &\longrightarrow V \\ x &\longrightarrow y \,/\, \theta_{x_0}(x) = y \\ & \qquad\quad x - x_0 = y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta_{x_0}^{-1} : V &\longrightarrow V \\ y &\longrightarrow x \,/\, x - x_0 = y \Leftrightarrow x = x_0 + y \end{aligned}$$

Es decir, en este caso <u>la suma de un punto y un vector coincide con la suma de vectores</u>.

SUBESPACIOS AFINES

Definición: Sea A un espacio afín sobre V. Un subconjunto $S \subseteq A$ es un **subespacio afín** cuando existe un punto $p \in A$, y un subespacio vectorial (no vacío) W de V tales que:

$$S = \{ q \in A \mid q = p + v,\ v \in W \}$$

El cjto. de todos los puntos tales que el vector que los une está en W

S se denota por $p + W$

Corolario: $p \in S$ $(0 \in W)$

Esto es equivalente a decir que S es un espacio afín sobre W con la aplicación $\tilde{\theta} = \theta_{|S \times S}$

Hipótesis: $S = \{ q \in A \mid q = p + v,\ v \in W \}$

Demostración: $\Rightarrow$

$$\tilde{\theta} : S \times S \longrightarrow W$$
$$(r, s) \longrightarrow \tilde{\theta}(r,s) = \theta(r,s)$$

- $\tilde{\theta}$ está bien definida:

$v_1, v_2 \in W$ $\left.\begin{array}{l} r = p + v_1 \\ s = p + v_2 \end{array}\right\}$ $\tilde{\theta}(r,s) = \vec{rs} = \vec{pp} + v_2 - v_1 = \underbrace{v_2 - v_1}$

$\in W$ por ser v_1 y $v_2 \in W$ y ser W subespacio

- $\tilde{\theta}(r,s) + \tilde{\theta}(s,t) = \theta(r,s) + \theta(s,t) \underset{\downarrow}{=} \theta(r,t) \underset{\downarrow}{=} \tilde{\theta}(r,t) = \tilde{\theta}(r,s) + \tilde{\theta}(s,t)$

θ se verifica para TODO A, en particular para S — $r, t \in S$

- Satisface: $\forall r \in S, \forall v \in W \subseteq V$, por ser A espacio afín, $\exists!\, s \in A$ tq $\theta(r,s) = v$

$$\theta(r,s) = \vec{rs} = v = \overrightarrow{(p+u)s} = \overrightarrow{(p+u)(p+y)} = v = \vec{pp} + y - u = v$$

$\forall p, s\ \exists!\, y \in V$ tq $p + y = s$

$\Downarrow$

$y = u + v$

Como $u \in W$ porque $r \in S$ $\Longrightarrow y \in W$

y, por hipótesis, $v \in W$

$$\Downarrow$$

$\boxed{s = p + y \in S}$ C.Q.D.

$\Longleftarrow$ Hipótesis: Con la aplicación $\tilde{\theta} = \theta|_{S\times S}$, S es espacio afín sobre W

Como $S \neq \emptyset$, $\exists p \in S$ tq:

~~$\tilde{\theta}_p : W \to S$ es biyectiva~~

$\boxed{\forall v \in W \ \exists! q \in S \text{ tq } p+v = q}$

$$\Downarrow$$

$\tilde{\theta}_p : S \to W$ es biyectiva $\Longrightarrow$ $\tilde{\theta}_p^{-1} : W \to S$ es biyectiva

$q \to \vec{pq} \in W \subseteq V$ $\qquad$ $v \to p+v$

$\boxed{\forall q \in S \ \exists v \in W \text{ tq } q = p+v}$

$$\Downarrow$$

$$S = \{q \in A \mid q = p+v, v \in W\}$$

Lo enunciado demuestra:

- Todos los elementos de S se escriben como suma de p y un vector de W
- Si un elemento se escribe como $p+v$, entonces pertenece a S

Proposición: sean S_1 y S_2 dos subespacios afines de A:

$$S_1 = p_1 + W_1$$
$$S_2 = p_2 + W_2$$

entonces, $\boxed{S_1 = S_2 \iff \underbrace{W_1 = W_2}_{} \wedge \overrightarrow{p_1p_2} \in W_1}$

A este espacio se le llama **subespacio de dirección de S_1**

$\Updownarrow$

$p_1 + v = p_2$, con $v \in W_1$

$\Downarrow$

$\boxed{p_2 \in S_1}$

Es decir, la escritura como $p + W$ es prácticamente única: si varías el subespacio afín, sólo puedo cambiar p por cualquier otro punto del subespacio

Demostración:

$\Rightarrow$ **Hipótesis**: $S_1 = S_2$

Como $p_1 \in S_1$ ($0 \in W_1$)

$\Downarrow (S_1 = S_2)$

$p_1 \in S_2 \Rightarrow \exists\, u \in W_2$ tq $p_1 = p_2 + u \Rightarrow \overrightarrow{p_2p_1} = u \in W_2$

Como $p_2 \in S_2$

$\Downarrow$

$p_2 \in S_1 \Rightarrow \exists\, v \in W_1$ tq $p_2 = p_1 + v \Rightarrow \overrightarrow{p_1p_2} = v \in W_1$

Como ambos vectores son opuestos, y en todo subespacio está también su opuesto:

$$\boxed{\overrightarrow{p_1p_2} \in W_1 \cap W_2}$$

~~Sea~~ $\cancel{u \in W_2 : p_2 + u \in S_2}$

$\cancel{\Downarrow S_1 = S_2}$

$\cancel{p_2 + u \in S_1 \Rightarrow p_2 + u = p_1 + v}$ ~~con~~ $\cancel{v \in W_1}$

$\cancel{\Downarrow}$

$\cancel{u = \overrightarrow{p_2p_1} + \underset{\in W_1}{v}}$

- Sea $a \in W_2$: $p_2 + a \in S_2$

$$\Downarrow S_1 = S_2$$

$$p_2 + a \in S_1 \Longrightarrow p_2 + a = p_1 + b \text{, con } b \in W_1$$

$$\Downarrow$$

$$a = \overrightarrow{p_2 p_1} + b = -v + b \in W_1$$

Es decir, cualquier vector de W_2 pertenece a W_1, y viceversa:

$$\boxed{W_1 = W_2}$$

$\Longleftarrow$ Hipótesis: $\begin{cases} S_1 = p_1 + W_1 \\ S_2 = p_2 + W_2 \\ \overrightarrow{p_1 p_2} \in W_1 \end{cases}$

$\forall q \in S_1 \quad q = p_1 + u, \ u \in W_1$

$$q = p_1 + u = p_2 + \underbrace{\overrightarrow{p_2 p_1}}_{\substack{\in W_1 \\ \text{(hipótesis)}}} + \underbrace{u}_{\in W_1} = p_2 + \underbrace{v}_{\in W_1} \in S_2$$

$$\left.\begin{array}{l} \forall q \in S_1, \ q \in S_2 \\ \text{Recíprocamente, } \forall p \in S_2, \ p \in S_1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{S_1 = S_2} \quad \text{C.Q.D.}$$

Ejemplos:

* V espacio afín sobre sí mismo:

  - Cualquier subespacio vectorial W es subespacio afín:

$$W = 0 + W$$

  - $\forall \vec{v} \in V$, $\vec{v} \neq 0$ $\quad \tilde{W} = \vec{v} + W$ es subespacio afín

(Es decir, hay más subespacios afines que subespacios vectoriales)

Ejemplo

$A = \mathbb{R}^3$ $\quad p_1 = (1,0,1)$ $\quad \vec{S}_1 = \{(x,x,0) \mid x \in \mathbb{R}\}$

$p_2 = (2,1,1)$ $\quad \vec{S}_2 = \{(x,y,z) \mid \begin{smallmatrix} x=y \\ z=0 \end{smallmatrix}\}$

Se tiene que $p_1 + \vec{S}_1 = p_2 + \vec{S}_2$:

- $\vec{S}_1 = \vec{S}_2$
- $\overrightarrow{p_1p_2} = (2,1,1) - (1,0,1) = (1,1,0) \in \vec{S}_1$

Proposición: dos puntos distintos de un espacio afín determinan una única recta.
(recta afín = punto + $\underbrace{\text{recta vectorial}}_{\text{subespacio de dimensión 1}}$), R_{pq}.

Demostración:

Hipótesis $\begin{cases} p, q \in A \\ p \neq q \Leftrightarrow \overrightarrow{pq} \neq 0 \end{cases}$

Sea el subespacio $\vec{S} = \{\lambda \overrightarrow{pq} \mid \lambda \in \mathbb{R}\} = \langle \overrightarrow{pq} \rangle$, recta

$S = p + \lambda \overrightarrow{pq}$ es una recta afín y si:

- $\lambda = 0 \rightarrow p \in S$
- $\lambda = 1 \rightarrow q \in S$

$\rightarrow$ Existe una recta afín que pasa por p y q

Supongamos que S' es otra recta afín que pasa por p y q: $S' = p + \mu v$ $(v \neq 0)$

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{pq} \\ \vec{pr} \end{pmatrix} \quad (\underline{\text{NOTACIÓN}})$$

Sea $\begin{pmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$ la inversa. Multiplicar por ella

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{pq} \\ \vec{pr} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} v_1 = c_1\vec{pq} + d_1\vec{pr} \\ v_2 = c_2\vec{pq} + d_2\vec{pr} \end{cases}$$

Así, v_1 y $v_2 \in \langle \vec{pq}, \vec{pr} \rangle \Longrightarrow \langle v_1, v_2 \rangle = \langle \vec{pq}, \vec{pr} \rangle$

$\Downarrow$ misma variedad de dirección y un punto

$P = \pi_{pqr}$

$\pi_{pqr} = p + \langle \vec{pq}, \vec{pr} \rangle$

- Ahora, supongamos $S = s + \vec{S}$ cumple:
  - $\dim \vec{S} = 2$ (plano)
  - $p \in S$
  - $q \in S$
  - $r \in S$

- $p \in S \Rightarrow S = p + \vec{S}$
- $q \in S \Rightarrow q = p + v,\ v \in \vec{S} \underset{\exists!}{\Longrightarrow} \vec{pq} \in \vec{S}$

Análogamente, $\vec{pr} \in \vec{S}$

Así, como $\vec{S}$ es subespacio, $\langle \underbrace{\vec{pq}, \vec{pr}}_{\substack{\text{Dim } 2 \\ \text{(afínmente independientes)}}} \rangle \subseteq \underbrace{\vec{S}}_{\dim 2}$

$\Downarrow$

$\vec{S} = \langle \vec{pq}, \vec{pr} \rangle$

Definición: $k+1$ puntos $\{p_0, p_1, \dots, p_k\} \in A$ son afínmente independientes cuando

$\downarrow$ El orden no importa

$\{\overrightarrow{p_0p_1}, \overrightarrow{p_0p_2}, \dots, \overrightarrow{p_0p_k}\}$ es un cjto. libre

$$\Updownarrow$$

$\forall i \in \{0, \dots, k\}$ $\{\overrightarrow{p_ip_0}, \dots, \overrightarrow{p_ip_{i-1}}, \overrightarrow{p_ip_{i+1}}, \dots, \overrightarrow{p_ip_k}\}$ es libre

($\overrightarrow{p_ip_i} = 0$ no está pq 0 no puede estar en un cjto. libre)

Demostración:

$$\sum_{j=1}^{k} \lambda_j \overrightarrow{p_0p_j} = 0 \iff \lambda_j = 0 \ \forall j \in \{1, \dots, k\}$$

$$\Updownarrow$$

$$\sum_{j=1}^{k} \lambda_j (\overrightarrow{p_0p_i} + \overrightarrow{p_ip_j}) = 0 \rightarrow \text{aquí } \overrightarrow{p_ip_i} \text{ no está}$$

$$\Updownarrow$$

$$\left(-\sum_{j=1}^{k} \lambda_j\right)\overrightarrow{p_ip_0} + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{k} \lambda_j \overrightarrow{p_ip_j} = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\mu_0 \overrightarrow{p_ip_0} + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{k} \mu_j \overrightarrow{p_ip_j} = 0$$

Y como todos los μ son C.L. de λ (que son 0), estamos ante un cjto. libre. C.Q.D.

En un espacio afín A el nº de puntos afinmente independientes es como máximo $1+\dim A$

Dados $K+1$ puntos afinmente independientes, existe un único subespacio afín de dimensión K que los contiene.

Demostración:

Sean $\{p_0, \dots, p_K\}$ los puntos afinmente independientes

$$S = \underbrace{p_0 + \underbrace{\lambda_1 \overrightarrow{p_0 p_1} + \lambda_2 \overrightarrow{p_0 p_2} + \dots + \lambda_K \overrightarrow{p_0 p_K}}_{\text{Subespacio vectorial de dimensión } K}}_{\text{Subespacio afín de dimensión } K}$$

Se demostraría que es único de manera similar a como hemos hecho con el plano

Universidad del País Vasco — Euskal Herriko Unibertsitatea

IKASLEEN ERREKTOREORDETZA
VICERRECTORADO DE ALUMNADO

INTERSECCIÓN DE SUBESPACIOS AFINES

Teorema: Sea $\{S_i\}_{i \in I}$ una familia de subespacios afines de A. Entonces:

I: cjto. de índices (finito)

$$\bigcap_{i \in I} S_i = \begin{cases} \emptyset \\ p_0 + \bigcap \vec{S}_i \end{cases}$$

Demostración:

$S_i = p_i + \vec{S}_i$

Si $\bigcap_{i \in I} S_i \neq \emptyset$, sea $p_0 \in \bigcap_{i \in I} S_i \rightarrow S_i = p_0 + \vec{S}_i$

$\forall p, q \in A \ \exists! \, v$ tq $q = p + v$

Sea $q \in \bigcap_{i \in I} S_i \Rightarrow q \in S_i \ \forall i \in I \Rightarrow q = p_0 + v \quad \forall i \in I$

$$\Downarrow$$

$\overrightarrow{p_0 q} = v \in \vec{S}_i \ \forall i \in I$

$q = p_0 + x$ con $x \in \vec{S}_i$ por ser $q \in S_i$

Como v es único $x = v$

$$\Downarrow$$

$v \in \vec{S}_i$

$$\Downarrow$$

$v \in \bigcap_{i \in I} \vec{S}_i$

Como $q \in p_0 + \bigcap_{i \in I} \vec{S}_i$, $\bigcap S_i \subset p_0 + \bigcap \vec{S}_i$

La otra implicación se demuestra de manera análoga.

$$\bigcap_{i \in I} S_i = p_0 + \bigcap_{i \in I} \vec{S}_i \quad \text{C.Q.D.}$$

Definición: el subespacio afín generado por un subconjunto $L \subseteq A$ es el menor subespacio ("contenido en cualquier otro subespacio afín") afín que contiene a L. Si S_L son todos los subespacios que contienen a L:

$$\langle L \rangle = \bigcap S_L$$ (subespacio por ser intersección de subespacios y no vacío porque $L \subset \langle L \rangle$)

Si $L = \{l_1, \dots, l_n\}$ es finito: $\overrightarrow{\langle L \rangle} = \langle \overrightarrow{l_1 l_2}, \overrightarrow{l_1 l_3}, \dots, \overrightarrow{l_1 l_n} \rangle$

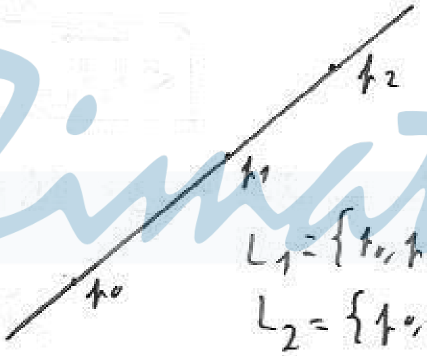
- $L = \{p_0\}$ $\quad \langle p_0 \rangle = \{p_0\} = p_0 + \{0\}$

- $L = \{p_0, p_1\}$ $\quad \langle p_0, p_1 \rangle = R_{p_0 p_1}$

- $L = \{p_0, p_1, p_2\}$ $\quad \langle p_0, p_1, p_2 \rangle = \begin{cases} R_{p_0 p_1} & \text{si } p_2 \in R_{p_0 p_1} \text{ (alineados)} \\ \Pi_{p_0 p_1 p_2} & \text{caso contrario} \end{cases}$

Es trivial demostrar que:

$$\boxed{L_1 \subset L_2 \Longrightarrow \langle L_1 \rangle \subseteq \langle L_2 \rangle}$$



$L_1 = \{p_1, p_2\}$

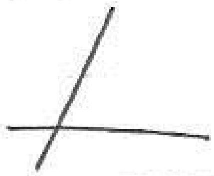
$L_2 = \{p_0, p_1, p_2\}$

$L_1 \subset L_2$

pero $\langle L_1 \rangle = \langle L_2 \rangle$

Habíamos visto:

- <u>Intersección</u> de <u>subespacios</u> <u>afines</u>: es o bien vacía o bien un subespacio afín.
- <u>Unión de subespacios afines</u>: <u>no</u> es, en general, un subespacio afín:



Sean $S_1 = p_1 + \vec{S}_1$ y $S_2 = p_2 + \vec{S}_2$ dos subespacios afines de A. Entonces:

$$\overrightarrow{\langle S_1 \cup S_2 \rangle} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2 + \langle \overrightarrow{p_1 p_2} \rangle$$

<u>Demostración</u>:

$\langle S_1 \cup S_2 \rangle$ es un subespacio afín (el otro día definimos $\langle\ \rangle$)

$$\langle S_1 \cup S_2 \rangle = p_1 + W$$

* $p_2 \in S_2 \Rightarrow p_2 \in \langle S_1 \cup S_2 \rangle \iff \overrightarrow{p_1 p_2} \in W$

* $S_1 \subset \langle S_1 \cup S_2 \rangle \Rightarrow \forall v \in \vec{S}_1,\ p_1 + v \in S_1 \subset \langle S_1 \cup S_2 \rangle \Rightarrow v \in W$

* $S_2 \subset \langle S_1 \cup S_2 \rangle \Rightarrow \forall u \in \vec{S}_2,\ p_2 + u \in S_2 \subset \langle S_1 \cup S_2 \rangle \Rightarrow \overrightarrow{p_1 p_2} + u \in W$

$$\Downarrow$$

$$u \in W$$

Es decir, $\vec{S}_1 + \vec{S}_2 + \langle \overrightarrow{p_1 p_2} \rangle \subset W = \overrightarrow{\langle S_1 \cup S_2 \rangle}$

La otra inclusión se obtiene de que $\langle S_1 \cup S_2 \rangle$ es el <u>mínimo</u> subespacio.

Sean $S_1 = p_1 + \vec{S}_1$ y $S_2 = p_2 + \vec{S}_2$ dos subespacios afines de A. Entonces:

$$S_1 \cap S_2 \neq \emptyset \iff \overrightarrow{p_1p_2} \in \vec{S}_1 + \vec{S}_2$$

(En este caso, $\langle \overrightarrow{S_1 \cup S_2} \rangle = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$, ya que $\overrightarrow{p_1p_2}$ "sobra")

Demostración:

$\Rightarrow$]

$$S_1 \cap S_2 \neq \emptyset \Rightarrow \exists p_0 \in S_1 \cap S_2 \begin{cases} S_1 = p_0 + \vec{S}_1 \Rightarrow p_1 \in S_1 \Rightarrow \overrightarrow{p_0p_1} \in \vec{S}_1 \\ S_2 = p_0 + \vec{S}_2 \Rightarrow p_2 \in S_2 \Rightarrow \overrightarrow{p_0p_2} \in \vec{S}_2 \end{cases}$$

$$\overrightarrow{p_1p_2} = \underbrace{\overrightarrow{p_1p_0}}_{\in \vec{S}_1} + \underbrace{\overrightarrow{p_0p_2}}_{\in \vec{S}_2} \in \vec{S}_1 + \vec{S}_2 \qquad \text{C.Q.D.}$$

$\Leftarrow$]

$$\overrightarrow{p_1p_2} \in \vec{S}_1 + \vec{S}_2 \iff \exists u \in \vec{S}_1,\ v \in \vec{S}_2 \text{ tq. } \overrightarrow{p_2p_1} = u + v$$

$$\Updownarrow$$

$$\overrightarrow{p_2p_1} \in \vec{S}_1 + \vec{S}_2$$

$$0 = -\overrightarrow{p_2p_1} + u + v = \overrightarrow{p_1p_2} + u + v = \overrightarrow{(p_1 - u)(p_2 + v)} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{p_1 - u}_{\in S_1} = \underbrace{p_2 + v}_{\in S_2} = q$$

$$\left.\begin{array}{l} q \in S_1 \\ q \in S_2 \end{array}\right\} \iff q \in S_1 \cap S_2$$

$$S_1 \cap S_2 \neq \emptyset \qquad \text{C.Q.D.}$$

FÓRMULAS DE GRASSMANN

Sean $S_1 = p_1 + \vec{S}_1$ y $S_2 = p_2 + \vec{S}_2$ subespacios afines de A. Entonces:

1. Si $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset \Rightarrow \dim \langle S_1 \cup S_2 \rangle = \dim \vec{S}_1 + \dim \vec{S}_2 - \dim(\vec{S}_1 \cap \vec{S}_2)$
2. Si $S_1 \cap S_2 = \emptyset \Rightarrow \dim \langle S_1 \cup S_2 \rangle = \dim \vec{S}_1 + \dim \vec{S}_2 - \dim(\vec{S}_1 \cap \vec{S}_2) + 1$

Demostración:

$$\dim \langle S_1 \cup S_2 \rangle = \dim \overrightarrow{\langle S_1 \cup S_2 \rangle} = \dim(\vec{S}_1 + \vec{S}_2 + \langle \overrightarrow{p_1 p_2} \rangle) =$$

$$= \begin{cases} (1)\ \text{Si } S_1 \cap S_2 \neq \emptyset,\ \langle \overrightarrow{p_1 p_2} \rangle \in \vec{S}_1 + \vec{S}_2;\ \dim(\vec{S}_1 + \vec{S}_2) = \dim \vec{S}_1 + \dim \vec{S}_2 - \dim(\vec{S}_1 \cap \vec{S}_2) \\ \qquad (-\dim \cap = 0) \\ (2)\ \text{Si } S_1 \cap S_2 = \emptyset,\ \langle \overrightarrow{p_1 p_2} \rangle \notin \vec{S}_1 + \vec{S}_2;\ \dim \langle S_1 \cup S_2 \rangle = \dim(\vec{S}_1 + \vec{S}_2) + \underbrace{\dim \langle \overrightarrow{p_1 p_2} \rangle}_{\dim 1} = \\ \qquad = \dim \vec{S}_1 + \dim \vec{S}_2 - \dim(\vec{S}_1 \cap \vec{S}_2) + 1 \end{cases}$$

~~Ejemplo: $A = \mathbb{R}^2$~~

~~$S_1 \begin{cases} \text{punto } (\dim 0) \\ \text{recta } (\dim 1) \end{cases}$ $\quad S_2 \begin{cases} \text{punto } (\dim 0) \\ \text{recta } (\dim 1) \end{cases}$~~

~~- Unión de puntos (p_0 y p_1) $\begin{cases} p_0 \cap p_1 \neq \emptyset \Rightarrow p_0 = p_1 \Rightarrow \dim(p_0 + p_1) = 0+0-0 \to \text{punto} \\ p_0 \cap p_1 = \emptyset \Rightarrow p_0 \neq p_1 \Rightarrow \dim(p_0 + p_1) = 0+0-0+1 \to \text{recta} \end{cases}$~~

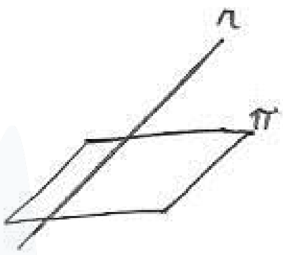
~~- Unión de rectas (R_1 y R_2) {~~

PARALELISMO

Sea A un espacio afín sobre V. Sean $S_1 = p_1 + \vec{S_1}$ y $S_2 = p_2 + \vec{S_2}$.

Definición: se dice que S_1 es paralelo a S_2 cuando $\vec{S_1} \subseteq \vec{S_2}$

Nótese que esto no implica que S_2 es paralelo a S_1: (porque $A // B$, $\dim A < \dim B$)
necesario pero no suficiente



r es paralela a π, pero π no es paralelo a r

(π: dim 2; r: dim 1)

Definición: S_1 y S_2 se dicen paralelos cuando:

$$\vec{S_1} = \vec{S_2}$$

Sean S_1 y S_2 subespacios de A y S_1 paralelo a S_2. Entonces:

o bien $S_1 \subseteq S_2$; o bien $S_1 \cap S_2 = \emptyset$

Demostración:

$$S_1 \cap S_2 \neq \emptyset \Rightarrow \exists p_0 \in S_1 \cap S_2 \begin{cases} S_1 = p_0 + \vec{S_1} \\ S_2 = p_0 + \vec{S_2} \end{cases}$$

$$\forall q \in S_1,\ \vec{p_0 q} \in \vec{S_1} \subseteq \vec{S_2} \Rightarrow q \in S_2 \Rightarrow S_1 \subseteq S_2$$

$$\Downarrow \qquad \Uparrow$$

$$\vec{p_0 q} \in \vec{S_2} \Rightarrow q = p_0 + \vec{p_0 q}$$

Demostrar:

a) Dos rectas distintas en $\mathbb{R}^2$ son paralelas si y sólo si no se cortan

Determinar:

b) La dimensión del subespacio generado por dos rectas en $\mathbb{R}^n$

c) La dimensión del subespacio determinado por una recta y un plano en $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$

a) $s_1 // s_2 \iff s_1 \cap s_2 = \emptyset$

s_1 y s_2 paralelas

$\Updownarrow$

$\vec{s}_1 = \vec{s}_2$

s_1 y s_2 distintas

$\Updownarrow$

$\vec{s}_1 \neq \vec{s}_2 \vee \overrightarrow{P_1P_2} \notin \vec{s}_1$

$\Updownarrow$ $\vec{s}_1 = \vec{s}_2$ (al leer de abajo arriba, el mero hecho de que $\overrightarrow{P_1P_2} \notin \vec{s}_1$ implica que son distintas)

$\overrightarrow{P_1P_2} \notin \vec{s}_1$

$\Updownarrow$ $\cup\, \vec{s}_2$

$\overrightarrow{P_1P_2} \notin \vec{s}_1 + \vec{s}_2$

$\Updownarrow$

$s_1 \cap s_2 \neq \emptyset$

b) - Si se cortan: $\dim\langle s_1 \cup s_2\rangle = \dim \vec{s}_1 + \dim \vec{s}_2 - \dim(\vec{s}_1 \cap \vec{s}_2) =$

. $s_1 = s_2 \Rightarrow \vec{s}_1 = \vec{s}_2 = \vec{s}_1 \cap \vec{s}_2 \Rightarrow \dim\langle s_1 \cup s_2\rangle = \boxed{1}$

. $s_1 \neq s_2 \Rightarrow$ no son paralelas $\Rightarrow \vec{s}_1 \neq \vec{s}_2 \Rightarrow \vec{s}_1 \cap \vec{s}_2 \neq \vec{s}_1 \Rightarrow \vec{s}_1 \cap \vec{s}_2 \subset \vec{s}_1 \Rightarrow \vec{s}_1 \cap \vec{s}_2 = 0$

$\Downarrow$

$\dim\langle s_1 \cup s_2\rangle = \boxed{2}$

- Si no se cortan $\dim\langle s_1 \cup s_2\rangle = \overset{1}{\dim}\, \vec{s}_1 + \overset{1}{\dim}\, \vec{s}_2 - \dim(\vec{s}_1 \cap \vec{s}_2) + 1 = \boxed{2}$

$s_1 \cap s_2 = \emptyset$

$\Downarrow$

$s_1 \neq s_2$

Al ser s_1 y s_2 paralelas (por no cortarse), $\vec{s}_1 = \vec{s}_2 \Rightarrow \vec{s}_1 \cap \vec{s}_2 = \vec{s}_1$

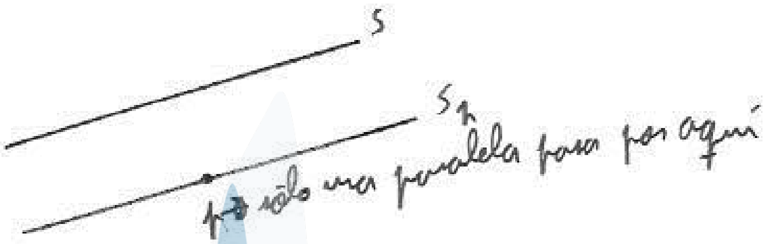
$\downarrow$

dim 1

- Si S_1 y S_2 son paralelos, entonces:

$$S_1 = S_2 \text{ , o bien } S_1 \cap S_2 = \emptyset$$

- Dado un subespacio afín S de A y cualquier punto $p \in A$, existe un único subespacio S_p t.q. S y S_p son paralelos y $p \in S_p$



Demostración:

$$S = p_0 + \vec{S}$$

Definimos $S_p = p + \vec{S}$ $\begin{cases} p \in S_p \; (0 \in \vec{S}) \\ \text{Paralelos (mismo subespacio director)} \end{cases}$

Unicidad:

Sea $\tilde{S}$ un subespacio paralelo que pasa por p

$$\Downarrow$$

$$\tilde{S} = p + W$$

$$\Downarrow \text{ paralelismo}$$

$$W = \vec{S}$$

$$\Downarrow$$

$$S_p = \tilde{S}$$

C.Q.D.

Posición relativa de dos rectas

R_1 ; $\vec{R}_1 = \langle v \rangle$

R_2 ; $\vec{R}_2 = \langle u \rangle$

Como $\vec{R}_1 \cap \vec{R}_2 \leq \vec{R}_1 \longrightarrow \dim(\vec{R}_1 \cap \vec{R}_2) \begin{cases} 0 \to u \text{ y } v \text{ L.I.} \to \text{no son paralelas } ① \\ 1 \to u \text{ y } v \text{ L.D. } (\vec{R}_1 = \vec{R}_2) \to \text{son paralelas } ② \end{cases}$

① $\begin{cases} R_1 \cap R_2 \neq \emptyset & \dim \langle R_1 \vee R_2 \rangle = 1 + 1 - 0 = 2 \text{ se cortan en 1 punto} \\ R_1 \cap R_2 = \emptyset & \dim \langle R_1 \vee R_2 \rangle = 1+1-0+1 = 3 \text{ se cruzan} \end{cases}$

② $\begin{cases} R_1 \cap R_2 \neq \emptyset & \dim \langle R_1 \vee R_2 \rangle = 1+1-1 = 1 \text{ son iguales} \\ R_1 \cap R_2 = \emptyset & \dim \langle R_1 \vee R_2 \rangle = 1+1-1+1 = 2 \text{ paralelas distintas} \end{cases}$

Si $\dim A = 2$ y las rectas son distintas, o bien se cortan en un punto, o bien son paralelas

Recta y plano

R y P

$\dim \vec{R} \cap \vec{P} \begin{cases} 0 \begin{cases} R \cap P \neq \emptyset & \dim \langle R \vee P \rangle = 1+2-0+0 = 3 \text{ se cortan en un punto} \\ R \cap P = \emptyset & \dim \langle R \vee P \rangle = 1+2-0+1 = 4 \text{ se cruzan} \end{cases} \\ 1 \begin{cases} R \cap P \neq \emptyset & \dim \langle R \vee P \rangle = 1+2-1+0 = 2 \text{ recta contenida en el plano} \\ R \cap P = \emptyset & \dim \langle R \vee P \rangle = 1+2-1+1 = 3 \text{ recta paralela al plano y no contenida en él} \end{cases} \end{cases}$

Ejemplo de recta y plano que se cruzan

$R: (0,0,0,0) + \lambda(1,0,0,0)$ $\quad \vec{R} \cap \vec{P} = \{(0,0,0,0)\}$

$P: (0,0,0,1) + \mu(0,1,0,0) + \nu(0,0,1,0)$

$R \cap P: \overrightarrow{r_0 p_0} = (0,0,0,1) \neq \lambda(1,0,0,0) + \mu(0,1,0,0) + \nu(0,0,1,0) \longrightarrow R \cap P = \emptyset$

$\neq \vec{R} + \vec{P}$

se cruzan

Dos planos: P_1 y P_2

$$\vec{P_1} \cap \vec{P_2} \begin{cases} 0 \begin{cases} P_1 \cap P_2 \neq \emptyset & 2+2-0 = 4 \\ P_1 \cap P_2 = \emptyset & 2+2-0+1 = 5 \end{cases} \\ 1 \begin{cases} P_1 \cap P_2 \neq \emptyset & 2+2-1 = 3 \\ P_1 \cap P_2 = \emptyset & 2+2-1+1 = 4 \end{cases} \\ 2 \begin{cases} P_1 \cap P_2 \neq \emptyset & 2+2-2 = 2 \\ P_1 \cap P_2 = \emptyset & 2+2-2+1 = 3 \end{cases} \end{cases}$$

- 4: se cortan en 1 punto
- 5: "se cruzan"
- 3: se cortan en una recta
- 4: "se cruzan"
- 2: el mismo plano
- 3: paralelos y distintos

POSICIÓN RELATIVA

No paralelos:

- $R \cap S \neq \emptyset$: se cortan en:
  - $\dim R \cap S = 0 \Rightarrow$ Un punto
  - $\dim R \cap S = 1 \Rightarrow$ Una recta
  - $\dim R \cap S = 2 \Rightarrow$ Un plano
- $R \cap S = \emptyset$: se cruzan

Paralelos:

- $R \cap S \neq \emptyset$: uno contenido en otro
- $R \cap S = \emptyset$: paralelos y distintos

Aplicaciones afines (conservan la afinidad) (Nota ☺)

Sean A y A' espacios afines sobre V y V', respectivamente.

Sea f:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, shift right, "\theta_a"'] & A' \arrow[d, shift right, "\theta_{f(a)}"'] \\ V \arrow[r, "\vec{f}_a"'] \arrow[u, shift right, "\theta_a^{-1}"'] & V' \arrow[u, shift right, "\theta_{f(a)}^{-1}"'] \end{tikzcd} \rightarrow \text{Biyectiva}$$

Fijamos $a \in A$
$\downarrow$
$f(a) \in A'$

$\vec{f}_a : V \longrightarrow V'$; $\vec{f}_a = \theta_{f(a)} \circ f \circ \theta_a^{-1}$

Definición: La aplicación $f: A \longrightarrow A'$ se dice afín cuando $\exists\, a \in A$ tq

$$\vec{f}_a = \theta_{f(a)} \circ f \circ \theta_a^{-1}$$

es lineal

Teorema: La definición de aplicación afín no depende de a, si $\exists a$, cualquier punto p cumple que $\vec{f}_p$ es lineal

Demostración:

Sea $\vec{f}_b$ con $b \in A$; $\vec{f}_a = \theta_{f(a)} \circ (\underbrace{\theta_{f(b)}^{-1} \circ \theta_{f(b)}}_{\text{identidad}}) \circ f \circ (\underbrace{\theta_b^{-1} \circ \theta_b}_{\text{identidad}}) \circ \theta_a^{-1} =$

$= (\theta_{f(a)} \circ \theta_{f(b)}^{-1}) \circ (\theta_{f(b)} \circ f \circ \theta_b^{-1}) \circ (\theta_b \circ \theta_a^{-1}) = \theta_{f(a)} \circ \theta_{f(b)}^{-1} \circ \vec{f}_b \circ \theta_b \circ \theta_a^{-1}$

$\theta_b \circ \theta_a^{-1}$:

$$\begin{aligned} V &\xrightarrow{\theta_a^{-1}} A \xrightarrow{\theta_b} V \\ u &\longrightarrow a+u \longrightarrow \overrightarrow{b\,(a+u)} = \overrightarrow{ba} + u \end{aligned}$$

Análogamente,

$$\theta_{f(a)} \circ \theta^{-1}_{f(b)} : \begin{aligned} V &\longrightarrow V \\ v &\longrightarrow \overrightarrow{f(a)f(b)} + v \end{aligned}$$

$f: A \longrightarrow A'$ se dice afín cuando $\exists a \in A$ tq $\vec{f}_a = \theta_{f(a)} \circ f \circ \theta_a^{-1}$ es lineal

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\theta_a"'] & A' \arrow[d, "\theta_{f(a)}"] \\ V \arrow[r, "\vec{f}_a"] & V' \end{tikzcd}$$

Vemos $\vec{f}_a(v)$:

$$\begin{tikzcd} a+v \arrow[r, "f"] & f(a+v) \arrow[d, "\theta_{f(a)}"] \\ v \arrow[u, "\theta_a^{-1}"] & \overrightarrow{f(a)f(a+v)} \end{tikzcd}$$

Así, $\vec{f}_a(v) = \overrightarrow{f(a)f(a+v)}$

$\boxed{\text{Vamos a comprobar que si } \vec{f}_a \text{ es lineal, } \forall b \in A \ \vec{f}_b = \vec{f}_a \text{: la definición de aplicación afín no depende del punto}}$

Demostración:

$$\vec{f}_b = \theta_{f(b)} \circ f \circ \theta_b^{-1} = \theta_{f(b)} \circ \underbrace{(\theta_{f(a)}^{-1} \circ \theta_{f(a)})}_{\text{identidad}} \circ f \circ \underbrace{(\theta_a^{-1} \circ \theta_a)}_{\text{identidad}} \circ \theta_b^{-1} =$$

$$= \theta_{f(b)} \circ \theta_{f(a)}^{-1} \circ \underbrace{\theta_{f(a)} \circ f \circ \theta_a^{-1}}_{\vec{f}_a} \circ \theta_a \circ \theta_b^{-1} = \theta_{f(b)} \circ \theta_{f(a)}^{-1} \circ \vec{f}_a \circ \theta_a \circ \theta_b^{-1} = \vec{f}_b$$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\vec{f}_b"] \arrow[dd, bend right=60, "\theta_a \circ \theta_b^{-1}"'] & V' \arrow[dd, bend left=60, "\theta_{f(a)} \circ \theta_{f(b)}^{-1}"] \\ A \arrow[u, "\theta_b"] \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\theta_a"] & A' \arrow[u, "\theta_{f(b)}"'] \arrow[d, "\theta_{f(a)}"'] \\ V \arrow[r, "\vec{f}_a"] & V' \end{tikzcd}$$

Ahora: $V \xrightarrow{\theta_b^{-1}} A \xrightarrow{\theta_a} V$

$$v \longrightarrow b+v \longrightarrow \overrightarrow{ab}+v = (\theta_a \circ \theta_b^{-1})(v)$$

$$\overrightarrow{a(b+v)} = \overrightarrow{ab}+v-0 = \overrightarrow{ab}+v$$

$\vec{f}_a$ es lineal

Así, $$\vec{f}_b(v) = \left(\theta_{f(b)} \circ \theta_{f(a)}^{-1}\right)\left(\vec{f}_a(\theta_a \circ \theta_b^{-1}(v))\right) = \left(\theta_{f(b)} \circ \theta_{f(a)}^{-1}\right)\left(\vec{f}_a(\overrightarrow{ab}+v)\right) \overset{1}{=}$$

$$= \left[\theta_{f(b)} \circ \theta_{f(a)}^{-1}\right]\left(\vec{f}_a(\overrightarrow{ab}) + \vec{f}_a(v)\right) = \overrightarrow{f(b)f(a)} + \vec{f}_a(\overrightarrow{ab}) + \vec{f}_a(v) =$$

$$\overset{*}{=} \underbrace{\overrightarrow{f(b)f(a)} + \overrightarrow{f(a)f(b)}}_{\text{Opuestos}} + \vec{f}_a(v) = \boxed{\vec{f}_a(v) = \vec{f}_b(v)} \quad \text{c.q.d.}$$

$$\boxed{\text{A } \vec{f} \text{ se le llama aplicación lineal inducida por } f.}$$

Ejemplo:

$A = \mathbb{R}^2$ $\qquad f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$A' = \mathbb{R}$ $\qquad (x,y) \longrightarrow 1+2x+y$

¿Es afín?

Elegimos $a = (0,0)$:
$\downarrow$
$f(a) = 1$
$\downarrow$
$\theta_{f(a)} = \theta_1$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\theta_{(0,0)}"'] & \mathbb{R} \arrow[d, "\theta_1"] \\ \mathbb{R}^2 \arrow[r, "\vec{f}"] & \mathbb{R} \end{tikzcd} \quad : \quad \begin{tikzcd} (x,y) \arrow[r, "f"] & 1+2x+y \arrow[d, "\theta_1"] \\ (x,y) \arrow[u, "\theta_{(0,0)}"] \arrow[r, "\vec{f}"] & 2x+y \end{tikzcd}$$

$$\vec{f}(x,y) = 2x+y = (2 \;\; 1)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \vec{f} \text{ es lineal}$$
$\downarrow$
f es afín

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\theta_{(1,1)}"'] & \mathbb{R}^3 \arrow[d, "\theta_{(3,1,4)}"] \\ \mathbb{R}^2 \arrow[r] & \mathbb{R}^3 \end{tikzcd}$$

$f(x,y) = (1+x+y,\ 1+x-y,\ 2+2x)$ ¿es afín?

$a = (1,1)$
$\downarrow$
$f(a) = (3,1,4)$

$$\begin{tikzcd} (1+x,\ 1+y) \arrow[r] & (1+1+x+1+y,\ 1+1+x-1-y,\ 2+2+2x) = (3+x+y,\ 1+x-y,\ 4+2x) \arrow[d, "\theta_{(3,1,4)}"] \\ (x,y) \arrow[u, "\theta^{-1}_{(1,1)}"] & (x+y,\ x-y,\ 2x) \end{tikzcd}$$

$$\vec{f}(x,y) = (x+y,\ x-y,\ 2x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$\Downarrow$

Como se puede poner en forma matricial, $\vec{f}$ es lineal

$\Downarrow$

f es afín

Y nos fijamos que $f(x,y) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\text{Parte cte.}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{\text{Parte lineal}}$

Consideremos la aplicación de:

$$c_{p_1}: A \longrightarrow A'$$
$$p \longrightarrow p_1$$

$$\forall p \in A \quad c_{p_1}(p) = p_1$$

Es afín

Demostración:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "c_{p_1}"] \arrow[d, "\theta_a"'] & A' \arrow[d, "\theta_{p_1}"] \\
V \arrow[r, "\vec{c}_{p_1}"'] & V'
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
a+v \arrow[r] & p_1 \arrow[d] \\
v \arrow[u] & 0
\end{tikzcd}$$

Así, $\vec{c}_{p_1} \equiv 0$, que es una aplicación lineal $\Longrightarrow c_{p_1}$ es lineal c.q.d.

TRASLACIÓN DE VECTOR v

Sea $v \in V$ un vector fijado cualquiera:

$$\tau_v: A \xrightarrow{\tau_v} A$$
$$p \longrightarrow p+v$$

es afín

Demostración:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\tau_v"] \arrow[d, "\theta_a"'] & A \arrow[d, "\theta_{a+v}"] \\
V \arrow[r, "\vec{\tau}_v"'] & V
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
a+u \arrow[r, "\tau_v"] & (a+u)+v = (a+v)+u \arrow[d, "\theta_{a+v}"] \\
u \arrow[u, "\theta_a"] \arrow[r, "id_V \ \boxed{\text{lineal}}"'] & u
\end{tikzcd}$$

Homotecias

$\lambda \neq 0,1$: λid_V:

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\lambda id_V"] & V \text{ lineal} \\
A \arrow[u, "\theta_{p_0}"] \arrow[r, "h"] & A \arrow[u, "\theta_{h(p_0)}"']
\end{tikzcd}$$

Fijando p_0, queda definida h: (h, al ser afín, no va a depender de p_0, luego se puede comprobar)

$$\begin{tikzcd}
\overrightarrow{p_0p} \arrow[r, "\lambda id_V"] & \lambda \overrightarrow{p_0p} \arrow[d, "\theta_{h(p_0)}"] \\
p \arrow[u, "\theta_{p_0}"] \arrow[r, "h"'] & h(p_0) + \lambda \overrightarrow{p_0p}
\end{tikzcd}$$

$h(p) = h(p_0) + \lambda \overrightarrow{p_0p}$ es la homotecia de razón λ

($\lambda \neq 0,1$ pq:

- $\lambda = 0$: aplicación cte: $h(p) = h(p_0)$
- $\lambda = 1$: $h(p) = h(p_0) + \overrightarrow{p_0p} = \underbrace{h(p_0) + \overrightarrow{p_0h(p_0)} + \overrightarrow{h(p_0)p}}_{p} =$

$= \overrightarrow{p_0h(p_0)} + p$, que es una traslación.)

PUNTOS INVARIANTES

Un punto se dice invariante de una aplicación $h: A \to A$

si $h(q) = q$

Composición	Resultado
τ_{v} τ_{u}	τ_{u+v}
τ_{v} $h\left\langle {c \atop \lambda} \right.$	$\tau_{v} \circ h \left\langle {c+\frac{1}{1-\lambda} v \atop \lambda} \right.$ $h \circ \tau_{v} \left\langle {c+\frac{\lambda}{1-\lambda} v \atop \lambda} \right.$
$h_1 \left\langle {c_1 \atop \lambda_1} \right.$ $h_2 \left\langle {c_2 \atop \lambda_2} \right.$ Hacemos $h_1 \circ h_2$	calculando centros iguales $\lambda_1 \lambda_2 = 1$: $\tau_{(1-\lambda_1)\overrightarrow{c_2 c_1}}$ $\lambda_1 \lambda_2 \neq 1$: $h \left\langle {c_1 + \frac{\lambda_1(1-\lambda_2)}{1-\lambda_1\lambda_2} \overrightarrow{c_1 c_2} \atop \lambda_1 \lambda_2} \right.$

· Componer
· Hallar el pto invariante q
· [illegible] respecto de q

En general ¿qué algebra falta? → todo lo ponemos

- **Homotecias**: Si existieran puntos invariantes:

$$q = h(q) = h(p_0) + \lambda \overrightarrow{p_0 q}$$

$$\overrightarrow{h(p_0) q} = \lambda \overrightarrow{p_0 q}$$

$$\overrightarrow{h(p_0)p_0} + \overrightarrow{p_0 q} = \lambda \overrightarrow{p_0 q}$$

$$\Updownarrow$$

$$\overrightarrow{h(p_0)p_0} = (\lambda-1)\overrightarrow{p_0 q} \Leftrightarrow \overrightarrow{p_0 q} = \frac{1}{\lambda-1}\overrightarrow{h(p_0)p_0}$$

Como $\lambda \neq 1$, se puede dividir:

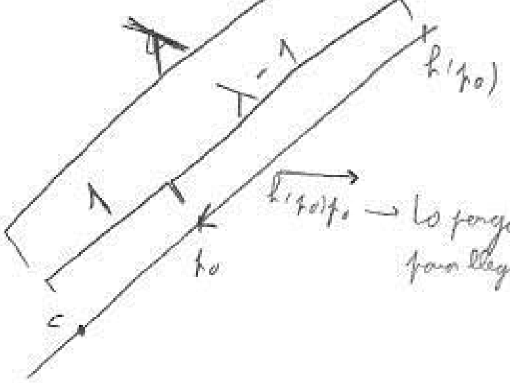
$$q = p_0 + \frac{1}{\lambda-1}\overrightarrow{h(p_0)p_0}$$

Cualquier homotecia de razón λ tiene un único punto fijo c:

$$c = p_0 + \frac{1}{\lambda-1}\overrightarrow{h(p_0)p_0}$$

El centro de la homotecia. Y, respecto de c, la homotecia se escribe:

$$h(p) = c + \lambda \overrightarrow{cp}$$



$\overrightarrow{h(p_0)p_0}$ → Lo pongo sobre p_0, contraído en la razón adecuada para llegar a c

Propiedades: (Conservan la afinidad)

Sea $f: A \to A'$ una aplicación afín. Entonces:

① S es subespacio afín de $A \Rightarrow f(S)$ es un subespacio afín de A' con variedad de dirección $\vec{f}(\vec{S})$

② S y T son subespacios afines de A y S es paralelo a T $\Rightarrow f(S)$ es paralelo a $f(T)$

③ $S' \subset A'$ es subespacio afín de A' y $f^{-1}(S') \neq \emptyset \Rightarrow f^{-1}(S')$ es subespacio afín de A con variedad de dirección $\vec{f}^{-1}(\vec{S}')$

④ Como θ_a es biyectiva, f y $\vec{f}$ tienen las mismas características (inyectiva, sobreyectiva, biyectiva...)

- $\vec{f}(\vec{ab}) = \overrightarrow{f(a)f(b)}$
- $f(p+v) = f(p) + \vec{f}(v)$

Demostración:

① $S = p_0 + \vec{S}$

$$f(S) = \{q \in A' \,/\, \exists p \in S \text{ tq } f(p) = q\}$$

$$q = f(p) \underset{p \in S}{=} f(p_0 + v) = f(p_0) + \underbrace{\vec{f}(v)}_{\substack{\text{Como } v \in \vec{S} \\ \vec{f}(v) \in \vec{f}(\vec{S})}} \Rightarrow q \in f(p_0) + \vec{f}(\vec{S})$$

- $f(S) \subset f(p_0) + \vec{f}(\vec{S})$

Si $r \in f(p_0) + \vec{f}(\vec{S}) \Rightarrow r = f(p_0) + \vec{f}(u)$ con $u \in \vec{S}$

$$\Downarrow$$

$$r = f(p_0 + u) \Rightarrow r \in f(S)$$

- $f(p_0) + \vec{f}(\vec{S}) \subset f(S)$

$$f(S) = f(p_0) + \vec{f}(\vec{S}) \quad \text{C.Q.D.}$$

subespacio afín de dirección $\vec{f}(\vec{S})$

② S paralelo a T

$$\Updownarrow \text{def}$$

$$\vec{S} \leq \vec{T}$$

$\Downarrow$ → si todos los elementos de $\vec{S}$ están en $\vec{T}$, todas sus imágenes estarán en $\vec{f}(\vec{T})$, por ser los elementos de $\vec{S}$ elementos de $\vec{T}$

$$\vec{f}(\vec{S}) \leq \vec{f}(\vec{T}) \Longrightarrow \left.\begin{array}{l} f(S) = f(p_0) + \vec{f}(\vec{S}) \\ f(T) = f(p_1) + \vec{f}(\vec{T}) \end{array}\right\} f(S) \text{ es paralelo a } f(T)$$

C.Q.D.

Ejemplo:

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \qquad (x,y) \longrightarrow (1+x, 1+2x)$$

afín, con

$$\vec{f}: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \qquad (x,y) \longrightarrow (x, 2x)$$

$$\left.\begin{array}{l} S = \mathbb{R}^2 \quad f(S) = (1,1) + x(1,2) \\ f(T) = (2,3) + \lambda(1,2) \end{array}\right] \text{Paralelas } (f(T) \text{ y } f(S))$$

$T = (1,0) + \lambda(1,0)$
$\downarrow$
paralelo a S

Como se ve, que en origen el paralelismo sea estricto no implica que en llegada lo sea (y viceversa)

③ Hipótesis: $\exists p_0 \in f^{-1}(S')$ — Particular $\Longrightarrow$ General

$$\Updownarrow$$

$$f(p_0) \in S' \Leftrightarrow f(p_0) = q_0 + w \ ; \text{ con } w \in \vec{S'}$$

$$f^{-1}(S') = \{p \in A \mid f(p) \in S'\} \overset{\text{Ambos}}{\overset{?}{=}} \{p \in A \mid f(p) = q_0 + v,\ v \in \vec{S'}\} =$$

$$= \{p \in A \mid \overrightarrow{q_0 f(p)} \in \vec{S'}\}$$

$$v = \overrightarrow{q_0 f(p)} = \underbrace{\overrightarrow{q_0 f(p_0)}}_{= w \in \vec{S'}} + \overrightarrow{f(p_0) f(p)}$$

$$\Longrightarrow \overrightarrow{f(p_0) f(p)} = \underbrace{v}_{\in \vec{S'}} - \underbrace{w}_{\in \vec{S'}} \in \vec{S'}$$

$$f(p) \in f(p_0) + \vec{S}'$$

$$\Downarrow$$

$$p \in \underbrace{p_0 + \vec{f}^{-1}(\vec{S}')}_{\text{subv. afín}}$$

$$\Downarrow$$

$$f^{-1}(S') \subset p_0 + \vec{f}^{-1}(\vec{S}')$$

La otra inclusión se demuestra de forma similar

COMPOSICIÓN DE APLICACIONES AFINES

$$A \xrightarrow{f} A' \xrightarrow{g} A''$$

Con f y g afines:

- $\vec{f}: V \to V'$
- $\vec{g}: V' \to V''$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\theta_a"'] \arrow[rr, bend left, "g \circ f"] & A' \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\theta_{f(a)}"] & A'' \arrow[d, "\theta_{g(f(a))}"] \\
V \arrow[r, "\vec{f}"] \arrow[rr, bend right, "\vec{g} \circ \vec{f}"'] & V' \arrow[r, "\vec{g}"] & V''
\end{tikzcd}$$

$$\left.\begin{array}{l} f = \theta^{-1}_{f(a)} \circ \vec{f} \circ \theta_a \\ g = \theta^{-1}_{g(f(a))} \circ \vec{g} \circ \theta_{f(a)} \end{array}\right\} g \circ f = \theta^{-1}_{g(f(a))} \circ \vec{g} \circ \underbrace{\theta_{f(a)} \circ \theta^{-1}_{f(a)}}_{id_{A'}} \circ \vec{f} \circ \theta_a =$$

$= \theta^{-1}_{g(f(a))} \circ (\vec{g} \circ \vec{f}) \circ \theta_a$. Como $\vec{g} \circ \vec{f}$ es lineal (composición de lineales)

$$\Downarrow$$

$$\boxed{f \text{ y } g \text{ afines} \Longrightarrow g \circ f \text{ es afín y } \overrightarrow{g \circ f} = \vec{g} \circ \vec{f}}$$

Sea A un espacio afín y:

$$\mathcal{A}(A) = \{ f : A \longrightarrow A \mid f \text{ afín} \}$$

En este conjunto tengo una operación:

$$\circ : \mathcal{A}(A) \times \mathcal{A}(A) \longrightarrow \mathcal{A}(A)$$
$$(g,f) \longrightarrow g \circ f$$

1 - $\circ$ es asociativa
2 - Tiene elemento neutro: $id_A : \begin{array}{l} A \longrightarrow A \\ p \longrightarrow p \end{array}$

$id_A \in \mathcal{A}(A) \rightarrow$ probado al margen

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f = id_A"] \arrow[d, "\theta_a"'] & A \arrow[d, "\theta_a"] \\ V \arrow[r, "\overrightarrow{id_A}"] & V \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} a+u \arrow[r] & a+u \arrow[d] \\ u \arrow[u] & u \end{tikzcd}$$

$\overrightarrow{id_A}$ es id_V, lineal
$\Downarrow$
id_A es afín
$\Downarrow$
$id_A \in \mathcal{A}(A)$

3 - En general, no todas las aplicaciones afines de un espacio en sí mismo son biyectivas (p.ej., la aplicación cte.) $\Longrightarrow$ $\mathcal{A}(A)$ no es un grupo

4 - En general, $g \circ f \neq f \circ g$

Me quedo con un subobjeto $G(A) = \{ f : A \rightarrow A \mid f \text{ es afín y biyectiva} \}$, que sí es grupo

Además: $\boxed{\text{Como } \theta_a \text{ es biyectiva, } f \text{ y } \vec{f} \text{ tienen las mismas características } \begin{cases} \text{- Inyectivas} \\ \text{- Sobreyectivas} \\ \text{- Biyectivas} \end{cases}}$

Así, $\boxed{G(A) = \{ f : A \longrightarrow A \mid \vec{f} \in GL(V) \}}$

Recordemos que $GL(V)$ es el cjto. de las aplicaciones lineales biyectivas de V.

$\circ : G(A) \times G(A) \longrightarrow G(A)$ es

- Asociativa
- Identidad $\in G(A)$
- Cada elemento de $G(A)$ tiene inversa, tb. $\in G(A)$

$\Rightarrow$ $G(A)$ es un grupo no conmutativo: el grupo afín de A

__Definición__: $f: A \to A$ afín se dice __afinidad__.

Las afinidades cumplen:

- La composición es asociativa
- Tiene elemento neutro (id_A)
- No toda afinidad tiene inversa: para evitar esto último, nos quedábamos con las afinidades inversibles: $f: A \to A$ afín tq $\vec{f} \in GL(V)$:

$$\Downarrow$$

$$GA(A)$$

$$f^{-1}: A \to A$$
$$p \to q \,/\, f(q) = p$$

es también afín, con $\overrightarrow{f^{-1}} = \vec{f}^{\,-1}$

- $GA(A) = \{f: A \to A \mid f \text{ es afín e inversible}\}$ cumple:

  * Asociativa

  * $id_A \in GA(A)$

  * $f \in GA(A) \Longrightarrow f^{-1} \in GA(A)$

  * $f \circ g \neq g \circ f$ en general

$$\Downarrow$$

$\boxed{GA(A) \text{ es un grupo no abeliano}}$

GA(A)

* Aplicación cte:

$$\left.\begin{array}{l} c: A \longrightarrow A \\ \quad p \longmapsto p_0 \\[1em] \vec{c}: V \longrightarrow V \\ \quad v \longmapsto 0 \end{array}\right\} \boxed{\notin GA(A)}$$

$\Downarrow$

Que, evidentemente, no es biyectiva

* Traslación:

$$\left.\begin{array}{l} \tau_v: A \longrightarrow A \\ \quad p \longmapsto p+v \\[1em] \vec{\tau}_v: V \longrightarrow V \quad = id_V \text{, biyectiva} \\ \quad u \longmapsto u \end{array}\right\} \boxed{\subset GA(A)}$$

Y como $\tau_v \circ \tau_u = \tau_{u+v} = \tau_{v+u} = \tau_u \circ \tau_v$

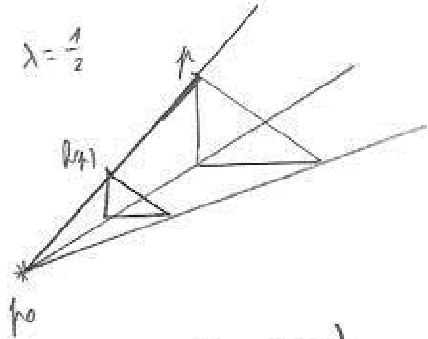
$\Downarrow$

Las traslaciones forman un subgrupo conmutativo del grupo afín

* Homotecia: (centro p_0 y razón $\lambda \neq 0,1$)

$h(p) = p_0 + \lambda \overrightarrow{p_0p}$; $\vec{h} = \lambda\, id_V$, invertible $\left(\vec{h}^{-1} = \frac{1}{\lambda}\, id_V\right)$

Es decir, $\boxed{\mathcal{H} \subset GA(A)}$



Ahora, la composición de 2 homotecias puede ser:

* identidad (mismo centro y razones inversas)
* traslación (distinto centro y razones inversas)
* homotecia (mismo centro y razones no inversas / distinto centro y razones no inversas)

Que no son homotecias.

Ahora, la composición de traslación y homotecia es una homotecia.

Así, definimos el conjunto de las <u>dilataciones</u> como las traslaciones y homotecias:

$$\boxed{\mathcal{D}=\{f:A\longrightarrow A \,/\, f \text{ es afín y } \vec{f}=\lambda\, id_V,\ \lambda\neq 0\}}$$

$\neq 0$ pq $\lambda=0$ son ctes. no biyectivas

Proposición: el conjunto de puntos fijos de una afinidad es un subespacio afín de dirección $Ker(\vec{f}-id_V)$, o bien el conjunto vacío.

Demostración: → Tomar $\vec{f}(\overrightarrow{p_0p})$

Llamamos $F=\{p\in A \mid f(p)=p\}$, el cjto. de puntos fijos de una aplicación afín.

Si F no es vacío, tomamos $p_0\in F$. $(f(p_0)=p_0)$

$\forall p\in F$, $f(p)=p$. Por la definición de aplicación afín, $\vec{f}(\overrightarrow{p_0p})=\overrightarrow{f(p_0)f(p)} \underset{p\,y\,p_0\in F}{=}$

$=\overrightarrow{p_0p} \Rightarrow p=p_0+\vec{f}(\overrightarrow{p_0p})$. Llamamos $v=\vec{f}(\overrightarrow{p_0p})$

Comprobamos que $\mathbb{v} \in Ker(\vec{f} - id_V) \rightarrow$ tendríamos punto + subespacio

$\Downarrow$

Subespacio afín

$$(\vec{f} - id_V)(\mathbb{v}) = \vec{f}(\mathbb{v}) - id_V(\mathbb{v}) = \vec{f}(\mathbb{v}) - \mathbb{v}$$

Ahora, $\vec{f}(\mathbb{v}) = \vec{f}(\vec{f}(\overrightarrow{p_0p})) = \vec{f}(\overrightarrow{f(p_0)f(p)}) \overset{p_0 \text{ y } p \text{ son invariantes}}{=} \vec{f}(\overrightarrow{p_0p}) = \overrightarrow{f(p_0)f(p)} \overset{p_0 \text{ y } p \text{ son invariantes}}{=}$

$= \overrightarrow{p_0p} = \mathbb{v} \Longrightarrow (\vec{f} - id_V)(\mathbb{v}) = 0 \Rightarrow \mathbb{v} \in Ker(\vec{f} - id_V)$

$\Downarrow$

$F \subset p_0 + Ker(\vec{f} - id_V)$

Comprobamos el recíproco:

$\mathbb{v} \in Ker(\vec{f} - id_V) \Leftrightarrow \vec{f}(\mathbb{v}) = \mathbb{v}$

Sea $p = p_0 + \mathbb{v} \Longrightarrow f(p) = f(p_0) + \vec{f}(\mathbb{v}) = p_0 + \mathbb{v} = p \Rightarrow p \in F$

$\Downarrow$

$p_0 + Ker(\vec{f} - id_V) \subset F$

$\Downarrow$

$$\boxed{F = p_0 + Ker(\vec{f} - id_V)}$$ C.Q.D.

Ahora bien, $F \neq \emptyset \Leftrightarrow \dim F \geq 1 \Leftrightarrow \dim(\mathrm{Ker}(\vec{f} - id_V)) \geq 1$

La implicación doble necesita la biyección de $F \neq \emptyset$, que NO tenemos si leemos hacia atrás

$\Updownarrow$

$\dim(\mathrm{Ker}(\vec{f} - id_V)) \neq 0 \Leftrightarrow \mathrm{Ker}\,\vec{f} - id_V \neq \mathbb{0}$

$\Updownarrow$ $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Updownarrow$

$\vec{f} - id_V$ no es inyectiva $\qquad\qquad V(1) \neq \mathbb{0}$

$\Updownarrow$

1 es valor propio de $\vec{f}$

Así, $\boxed{F \neq \emptyset \Leftrightarrow 1 \text{ es valor propio de } \vec{f}}$ Ejemplo: traslaciones. $\mathrm{Ker}(\vec{f} - id) = V$ y no tiene puntos fijos

Hemos probado que $F \neq \emptyset \Rightarrow \vec{F} = \mathrm{Ker}(\vec{f} - id)$, NO que $\forall f$ afín $\vec{F} = \mathrm{Ker}(\vec{f} - id_V)$, $\vec{f}$ DEBE tener puntos fijos para poder aplicarlo.

PROYECCIONES Y SIMETRÍAS

Recordemos: dos subespacios vectoriales $\vec{S}$ y $\vec{T}$ se dicen suplementarios cuando $V = \vec{S} \oplus \vec{T}$:

* $\vec{S} \cap \vec{T} = \{\mathbb{0}\}$
* $\forall w \in V, \left.\begin{array}{l} \exists!\, a \in \vec{S} \\ \exists!\, b \in \vec{T} \end{array}\right\} w = a + b$

Definición: sea A un espacio afín sobre V. Dos subespacios afines S y T de A son suplementarios cuando $\vec{S}$ y $\vec{T}$ son suplementarios.

Proposición: S y T suplementarios $\Rightarrow S \cap T = \{\underbrace{p_0}_{\text{Único punto}}\}$

Demostración:

Recordemos que $S\cap T \neq \emptyset \iff \overrightarrow{p_s q_s} \in \underbrace{\vec{S}+\vec{T}}_{=V}$

$$\Downarrow$$

$$S\cap T \neq \emptyset$$

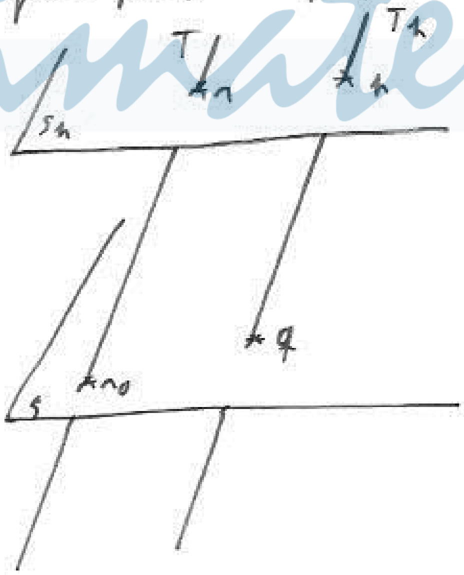
Además, vimos que $\overrightarrow{S\cap T} = \vec{S}\cap\vec{T} = \{0\}$

$$\Downarrow$$

$S\cap T$ es un único punto

C.Q.D.

Vimos Th. que dado un subespacio afín $S = p_0 + \vec{S}$ y un punto $p \in A$, $\exists!\, S_p$ tq $p \in S_p$ y S y S_p son paralelos.



Mañana veremos que las proyecciones:

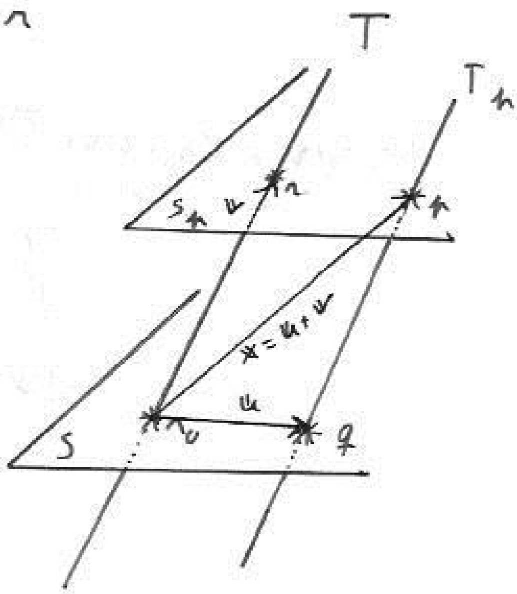
$$pr_T : A \longrightarrow A$$
$$p \longrightarrow n$$

$$pr_S : A \longrightarrow A$$
$$p \longrightarrow q$$

Son afines

Sea $p \in A \begin{cases} S_p = p + \vec{S} \\ T_p = p + \vec{T} \end{cases}$, con S y T suplementarios. Ahora: $(p_0 \in S \cap T)$

* T_p y S son suplementarios $\Rightarrow$ se cortan en q
* S_p y T son suplementarios $\Rightarrow$ se cortan en r



Al ser S_p y T_p únicos, podemos definir las aplicaciones:

$P_T : A \longrightarrow A$ Proyección sobre T paralelamente a S

$p \longrightarrow r$ (único)

$p \longrightarrow (p + \vec{S}) \cap T$

$P_S : A \longrightarrow A$ Proyección sobre S paralelamente a T

$p \longrightarrow q$ (único)

$p \longrightarrow (p + \vec{T}) \cap S$

Son aplicaciones afines.

<u>Demostración</u>:

$T_{r_0} = T$
$\Rightarrow P_T(r_0) = r_0$

$T_{r_0} \cap S = \{r_0\}$

Así, tomamos r_0:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{P_T} & A \\ \downarrow \theta_{r_0} & & \downarrow \theta_{r_0} \\ V & \longrightarrow & V \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} r_0 + u + v & \xrightarrow{\varphi} & r_0 + v \\ \uparrow & & \downarrow \\ x = u + v & & v \end{array}$$

Sea $u \in \vec{S}$ y $v \in \vec{T}$, entonces, $x = u + v \Rightarrow$
$x \in V$

Así, $\vec{P_T}(u + v) = v$: Descompongo el vector en un elemento de $\vec{S}$ y uno de $\vec{T}$ y me quedo con el de $\vec{T}$

Universidad del País Vasco · Euskal Herriko Unibertsitatea

IKASLEEN ERREKTOREORDETZA
VICERRECTORADO DE ALUMNADO

Al ser $V = \vec{S} \oplus \vec{T}$

$$\begin{array}{l} \qquad\ \ \in \vec{S} \quad \in \vec{T} \\ x = u + v \\ y = a + b \end{array}$$

$$\lambda, \mu \in K \Rightarrow \lambda x + \mu y = \underbrace{(\lambda u + \mu a)}_{\in \vec{S}} + \underbrace{(\lambda v + \mu b)}_{\in \vec{T}}$$

$$\vec{P}_T(\lambda x + \mu y) = \lambda v + \mu b = \lambda \vec{P}_T(x) + \mu \vec{P}_T(y) \Rightarrow \text{lineal}$$

$$\Downarrow$$

P_T es afín

c.q.d.

La afinidad de P_S se demuestra de manera análoga

SIMETRÍAS

Definición: sean $p, q \in A$. El punto $r \in A$ es el punto medio de p y q cuando

$$\vec{pr} = \vec{rq}$$

Y como $\vec{pq} = \vec{pr} + \vec{rq}$:

$$\boxed{\begin{array}{l} \cdot\ q = p + 2\vec{rq} \\ \cdot\ r = p + \frac{1}{2}\vec{pq} \end{array}}$$

$\rightarrow q = p + \vec{pq} = p + \underset{\substack{\downarrow \\ \vec{rq} \text{ por ser punto medio}}}{\vec{pr}} + \vec{rq} = p + 2\vec{rq}$

$\rightarrow r = p + \vec{pr} = p + \vec{pq} - \underset{\substack{\downarrow \\ \frac{1}{2}\vec{pq} \text{ por lo de arriba}}}{\vec{rq}} = p + \frac{1}{2}\vec{pq}$

Definición: sea $r_0 \in A$. Consideremos la aplicación:

$$S_{r_0} : A \longrightarrow A$$
$$p \longrightarrow q \ / \ r_0 \text{ es el punto medio de } p \text{ y } q$$

se denomina simetría respecto del punto r_0, y es una aplicación afín: una homotecia de razón -1 y centro r_0 ↗

Demostración:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{s_{r_0}} & A \\ \downarrow{\scriptstyle \theta_{r_0}} & & \downarrow{\scriptstyle \theta_{r_0}} \\ V & \longrightarrow & V \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} p = r_0 + x & \longrightarrow & q = r_0 + y \\ \uparrow & & \downarrow \\ x & \longrightarrow & y \end{array}$$

Busquemos qué es y.

Como el punto medio de p y q es r_0:

$$\overrightarrow{r_0 q} = \overrightarrow{p r_0} \quad \begin{cases} \overrightarrow{r_0 q} = y \\ \overrightarrow{p r_0} = -\overrightarrow{r_0 p} = -x \end{cases}$$

Así, $\vec{s}_{r_0}(x) = -x$, lineal y que induce una homotecia de razón -1 y centro r_0.

Definición: Sean S y T dos subespacios suplementarios. Definimos:

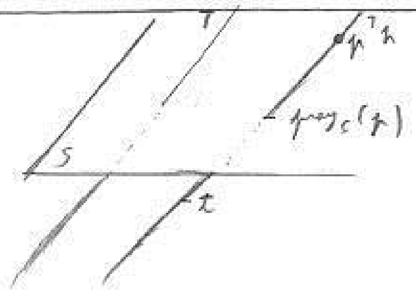
- Simetría respecto de S paralelamente a T:

$$Sim_S : A \longrightarrow A$$
$$p \longrightarrow t \ /\ \text{el pto. medio de } p \text{ y } t \text{ es la proyección de } p \text{ sobre } S \text{ paralelamente a } T$$

- Simetría respecto de T paralelamente a S:

$$Sim_T : A \longrightarrow A$$
$$p \longrightarrow w \ /\ \text{el pto. medio de } p \text{ y } w \text{ es la proyección de } p \text{ en } T$$

Son afines



Demostración: c)

q es el pto medio de p y t:

$$p = r_0 + u + v \quad \begin{cases} u \in \vec{S} \\ v \in \vec{T} \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$q = r_0 + u$$

$$¿\, t = r_0 + z\, ?$$

$$\vec{tq} = \vec{qp} = \overrightarrow{(r_0 + u)(r_0 + u + v)} = v$$

$$\parallel$$

$$\overrightarrow{(r_0 + z)(r_0 + u)} = u - z$$

$$v = u - z \Rightarrow z = u - v$$

Así, $\vec{\mathrm{sim}}_S (u + v) = u - v$ Separo un vector de V en uno de S y uno de T, y me quedo con la recta (invierto el de T)

Análogamente, $\vec{\mathrm{sim}}_T (u + v) = -u + v$ lineales, C.Q.D.

Se comprueba que, si r_0 es ~~el punto medio de p y q (con $\vec{S}$ y $\vec{T}$ suplementarios)~~:

$$\boxed{\begin{aligned} &\mathrm{sim}_S \circ \mathrm{sim}_T = s_{r_0} \\ &\mathrm{sim}_S \circ s_{r_0} = \mathrm{sim}_T \\ &\mathrm{sim}_T \circ s_{r_0} = \mathrm{sim}_S \end{aligned}}$$

~~$q = P_S(p)$~~

$$r_0 = S \cap T$$

SISTEMAS DE REFERENCIA AFÍN

Sea A un espacio afín sobre V finitamente generado

Definición: un sistema de referencia afín en A es el siguiente par:

$$R = (o, \{v_i\}_{i=1}^{n})$$

siendo $o \in A$

$\{v_i\}_{i=1}^{n}$ base de V

Y es que para cualquier $p \in A$ tenemos la siguiente aplicación biyectiva:

$$A \xrightarrow{\theta_o} V \xrightarrow{\text{isomorfismo}} \mathbb{R}^n$$

$$p \longrightarrow \overrightarrow{op} = \sum x^i v_i \longrightarrow \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = (x^i)_{i=1}^{n}$$

$$p \longleftrightarrow \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$$ coordenadas del punto p en el s.r R

Nota: usaremos el convenio de Einstein:

$$x^i v_i \equiv \sum x^i v_i \equiv x^1 v_1 + \dots + x^n v_n$$

Por ejemplo, las matrices:

$P = (p^{i}_{j})$ (i fila, j columna)

$Q = (q^{k}_{e})$

$$P \cdot Q = (P \cdot Q)^i_e = \left(\sum_{j=1}^{n} p^i_j q^j_e\right) = \left(p^i_j q^j_e\right)$$

Ejemplos:

$p \longleftrightarrow (x^i)_{i=1}^{n}$

$p' \longleftrightarrow (x'^i)_{i=1}^{n}$

$$\overrightarrow{pp'} = \overrightarrow{po} + \overrightarrow{op'} = -x^i v_i + x'^i v_i = \boxed{(x'^i - x^i) v_i = \overrightarrow{pp'}}$$

$\Downarrow$

Es como si trabajamos en $\mathbb{R}^n$

Ecuaciones de subespacios afines

Sea $R=(o,\{e_i\}_{i=1}^{n})$ un sistema de referencia.

$S = p_0 + \vec{S}$ subespacio afín de dimensión $r<n$

· $p_0 \longleftrightarrow \begin{pmatrix} x_0^1 \\ \vdots \\ x_0^n \end{pmatrix}$

· $\vec{S}$ admite una base $\{a_1,\dots,a_r\} = \mathcal{B}_{\vec{S}}$

Ahora, como $\vec{S} \in V$; $a_i = p_i^1 e_1 + \dots + p_i^n e_n \underset{\text{Einstein}}{=} p_i^j e_j$

La "matriz de cambio de base" es: $P = (p_i^j) \in Mat_{n\times r}(\mathbb{R})$, de rango r (los vectores de $\mathcal{B}_{\vec{S}}$ son L.I.)

· $\forall p \in S$: $p = p_0 + \lambda^1 a_1 + \dots + \lambda^r a_r$ a)

$\updownarrow$ usando el S.R.

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0^1 \\ \vdots \\ x_0^n \end{pmatrix} + \lambda^1 \begin{pmatrix} p_1^1 \\ \vdots \\ p_1^n \end{pmatrix} + \dots + \lambda^r \begin{pmatrix} p_r^1 \\ \vdots \\ p_r^n \end{pmatrix} \quad b)$$

Así, $\boxed{\forall i \in \{1,\dots,n\} \quad x^i = x_0^i + \sum_{j=1}^{r} \lambda^j p_j^i}$ $\Rightarrow$ Ecuaciones paramétricas de S en la referencia R (λ^j son los parámetros) c)

O, matricialmente, $\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0^1 \\ \vdots \\ x_0^n \end{pmatrix} + P \begin{pmatrix} \lambda^1 \\ \vdots \\ \lambda^r \end{pmatrix}$ d)

Como $rg(P) = r$; eliminamos de las n ecuaciones los r parámetros λ^i (luego un ejemplo)

$\Downarrow$

Obtenemos $n-r$ ecuaciones lineales del tipo $\sum_{i=1}^{n} A_i^j x^i = b^j$, $j \in \{1,\dots,n-r\}$ e)

$\Downarrow$ ecuaciones implícitas

Ejemplo:

Tomamos $\mathbb{R}^3$ con el S.R canónico: $\left((0,0,0), \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}\right)$

$$\Downarrow$$
$$\mathcal{B}_c$$

$$p=(x,y,z) \longleftrightarrow \vec{Op} = x\,e_1 + y\,e_2 + z\,e_3 \longleftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Sea S el plano que pasa por $(0,0,1)$ y tiene la dirección $\{(1,1,0),(1,0,1)\}$

$$S = (0,0,1) + \lambda(1,1,0) + \mu(1,0,1) = (\lambda+\mu, \lambda, 1+\mu) \quad a)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in S \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad b)$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} x = \lambda + \mu \\ y = \lambda \\ z = 1 + \mu \end{cases} \quad c)$$

O, matricialmente:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{P} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \quad d)$$

P tiene rango 2, ya que hay una submatriz con dte. $\neq 0$; p.ej: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ De aquí saco los parámetros

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} x = \lambda + \mu \\ \boxed{\begin{matrix} y = \lambda \\ z = 1 + \mu \end{matrix}} \end{cases} \rightarrow \text{Las incógnitas son } \underset{y}{\lambda} \text{ y } \underset{z-1}{\mu}$$

$$\Downarrow \text{ sustituimos}$$

$$x = y + z - 1$$

$$\boxed{x - y - z = 1} \quad e)$$

Además: $\boxed{rg(A_1^j) = n-r}$

Y como hay soluciones ($f_0 \in S$) $\Longrightarrow$ $\boxed{rg(A_1^j | b^j) = n-r \\ \Downarrow \\ \text{matriz ampliada}}$

El proceso es <u>reversible</u>. <u>Ejemplo</u>:

$$x - y - z = 1$$
$$\Downarrow$$
$$\begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \\ z = x - y - 1 = \alpha - \beta - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

· $R_A = \{O, \mathcal{B}\}$

· $R_{A'} = \{O', \mathcal{B}'\}$

$$p \in A \longleftrightarrow \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}, \text{ coordenadas de } \overrightarrow{Op} \text{ en } \mathcal{B}$$

$$f(p) \in A' \longleftrightarrow \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^m \end{pmatrix}, \text{ coordenadas de } \overrightarrow{O'f(p)} \text{ en } \mathcal{B}'$$

Concretamente:

$$f(O) \longleftrightarrow \begin{pmatrix} y_0^1 \\ \vdots \\ y_0^m \end{pmatrix}, \text{ coordenadas de } \overrightarrow{O'f(O)} \text{ en } \mathcal{B}'$$

$$\begin{tikzcd} p \arrow[r] \arrow[d, "\theta_O"'] & f(p) \\ \overrightarrow{Op} \arrow[r] & \vec{f}(\overrightarrow{Op}) \arrow[u, "\theta_{f(O)}^{-1}"'] \end{tikzcd} \Longrightarrow f(O) + \vec{f}(\overrightarrow{Op}) = f(p)$$

Así, pasando a coordenadas (unicidad $\Rightarrow$ son iguales):

$$\begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^m \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} y_0^1 \\ \vdots \\ y_0^m \end{pmatrix}}_{\text{coordenadas de } f(O)} + \underbrace{M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}\vec{f} \underbrace{\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}}_{\text{coordenadas de } \overrightarrow{Op} \text{ en } \mathcal{B}}}_{\text{coordenadas de } \vec{f}(\overrightarrow{Op}) \text{ en } \mathcal{B}'}$$

$\Downarrow$

Estamos en $\mathbb{R}^n$, donde la suma de un punto y un vector es la suma usual

Aplicaciones afines

$$f : A \longrightarrow A'$$

$p \in A \longleftrightarrow \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$

$R_A = (0, \{e_i\}_{i=1}^{n}) = (0, \mathcal{B})$

$R_{A'} = (0', \{e'_j\}_{j=1}^{m}) = (0', \mathcal{B}')$ $\quad f(p) \in A' \longleftrightarrow \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^m \end{pmatrix}$

Veamos la relación entre $\{y^i\}$ y $\{x^i\}$.

Ahora, como $f(0) \in A'$, $f(0) \longleftrightarrow \begin{pmatrix} y_0^1 \\ \vdots \\ y_0^m \end{pmatrix}$

Busquemos $f(p)$. Lo haremos con $\overrightarrow{f(0)f(p)} = \vec{f}(\overrightarrow{0p})$ al ser f afín

$$= \overrightarrow{f(0)0'} + \overrightarrow{0'f(p)}$$

(convenio de Einstein)

Ahora, $\vec{f}(\overrightarrow{0p}) = \vec{f}(x^i e_i) \underset{\vec{f} \text{ lineal}}{=} x^i \vec{f}(e_i) \underset{\vec{f} \text{ es lineal}}{=} \sum_{\substack{i=1 \\ j=1}}^{\substack{j=m \\ i=n}} x^i p_i^j e'_j$; con $(p_i^j) = M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(\vec{f})$

$\overrightarrow{f(0)0'} + \overrightarrow{0'f(p)} = -y_0^j e'_j + y^j e'_j = (-y_0^j + y^j) e'_j$

Ahora, $\sum_{\substack{i=1 \\ j=1}}^{\substack{j=m \\ i=n}} x^i p_i^j e'_j = (-y_0^j + y^j) e'_j$, y por unicidad de coordenadas:

$$\sum_{i=1}^{n} x^i p_i^j = -y_0^j + y^j \; ; \text{ con } j \in \{1, \dots, m\}$$

Así,

$$\begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^m \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} y_0^1 \\ \vdots \\ y_0^m \end{pmatrix}}_{\text{Parte de traslación}} + \underbrace{P \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}}_{\text{Parte lineal}} \text{ ; con:}$$

- $\begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^m \end{pmatrix}$ son las coordenadas de $f(p)$ en $R_{A'}$
- $\begin{pmatrix} y_0^1 \\ \vdots \\ y_0^m \end{pmatrix}$ son las coordenadas de $f(0)$ en $R_{A'}$
- $P = M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(\vec{f})$: coordenadas de las imágenes de $\{e_i\}$ a $\{e'_i\}$

  $P \in Mat_{m \times n}(\mathbb{R})$
- $\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$ son las coordenadas de p en R_A

Cambios de S.R

Sean R_1 y R_2 dos sistemas de referencia de un espacio afín A:

- $R_1 = (O, \{e_i\}_{i=1}^n)$

- $R_2 = (O', \{\bar{e}_i\}_{i=1}^n)$

$$\begin{tikzcd} & \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \arrow[dd, bend left, "?"] \\ p \in A \arrow[ur, "R_1"] \arrow[dr, "R_2"'] & \\ & \begin{pmatrix} \bar{x}^1 \\ \vdots \\ \bar{x}^n \end{pmatrix} \end{tikzcd}$$

$\rightarrow$ Consideramos la aplicación identidad para hallar la relación

Cambio de S.R

Sea A un espacio afín con dos S.R.:

- $(O, \{e_i\}_{i=1}^n) = R_1$
- $(O', \{\bar{e}\}_{i=1}^n) = R_2$

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & (x^i) \\ p \in A \arrow[ur, "R_1"] \arrow[dr, "R_2"'] & \\ & (\bar{x}^i) \end{tikzcd}$$

Queremos relacionar x^i y $\bar{x}^i$

Evidentemente, en R_1, O tiene coordenadas (0). No así en R_2:

	R_1	R_2
O	(0)	(x_0^i)
O'	$(\bar{x}_0^i)$	(0)
p	(x^i)	$(\bar{x}^i)$

$$\overrightarrow{O'O} = x_0^i \bar{e}_j$$

$$\overrightarrow{OO'} = \bar{x}_0^i e_i$$

$$\overrightarrow{Op} = x^i e_i$$

$$\overrightarrow{O'p} = \bar{x}^i \bar{e}_j$$

Ahora, $e_i = p_i^j \bar{e}_j \qquad P = (p_i^j) = M_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}$

$$\overset{\text{coord. en } \mathcal{B}_1}{x^i} e_i = \overset{\text{coord. en } \mathcal{B}_2}{[p_i^j x^i]} \bar{e}_j$$

$$P = Q^{-1}$$

$\bar{e}_j = q_j^i e_i \qquad Q = (q_i^j) = M_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1}$

Como
$$\left.\begin{aligned} \overrightarrow{Op} &= x^i e_i = x^i p_i^j \bar{e}_j \\ \overset{\parallel}{\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'p}} &= -x_0^i \bar{e}_j + \bar{x}^i \bar{e}_j = (\bar{x}^i - x_0^i)\, \bar{e}_j \end{aligned}\right\} \quad x^i p_i^j = \bar{x}^i - x_0^i \ \ \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

$$\bar{x}^i = x_0^i + p_i^j x^i \ \ \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

O, matricialmente:

$$\begin{pmatrix} \bar{x}^1 \\ \vdots \\ \bar{x}^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0^1 \\ \vdots \\ x_0^n \end{pmatrix} + P \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \text{, con:}$$

$\vec{o'p} = \vec{o'o} + \vec{op}$ → Hay que pasarla a $\mathcal{B}'$ para poder sumar

- $\begin{pmatrix} \bar{x}^1 \\ \vdots \\ \bar{x}^n \end{pmatrix}$ son las coordenadas de p en R_2
- $\begin{pmatrix} x_0^1 \\ \vdots \\ x_0^n \end{pmatrix}$ son las coordenadas de o en R_2
- $P = M_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}$
- $\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$ son las coordenadas de P en R_1

(Nótese que esto equivale a la aplicación afín identidad)
$\Downarrow$ $\vec{f} = id$

Dos casos interesantes:

a) $\underline{o = o'}$: $(\bar{x}^i) = P(x^i)$ al ser las coordenadas de o (0)
↳ cambio de base en un espacio vectorial

b) $\underline{\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_2}$: $e_i = \bar{e}_i$ $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ (ordenados igual)

$$(\bar{x}^i) = (x_0^i) + (x^i) \quad \text{al ser } P = I_n$$
↓
Traslación en A

Ecuación de un hiperplano

Sea A un espacio afín sobre un espacio vectorial V

* Definición: $\vec{H}$ es un hiperplano vectorial cuando es suplementario de una recta vectorial:

$$\exists\, a \neq 0 \text{ tq } V = \vec{H} \oplus \langle a \rangle$$

· Corolario: $\vec{H}$ es un subespacio propio maximal. Es decir:

$$\vec{H} \subsetneq \underbrace{F}_{\text{subespacio}} \Longrightarrow F = V$$

(No existe ningún subespacio $\neq V$, $\neq \vec{H}$ tq $\vec{H}$ esté contenido en él)

· Corolario: $b \notin \vec{H} \Longrightarrow V = \vec{H} \oplus \langle b \rangle$

(En $\mathbb{R}^3$, son planos)

* Un subespacio afín H es un hiperplano afín cuando su variedad de dirección es un hiperplano vectorial:

$$H = p_0 + \vec{H}$$

con $\vec{H}$ hiperplano vectorial

Definición: una forma lineal en V es una aplicación f lineal que va de V a $\mathbb{R}$:

$$f: V \longrightarrow \mathbb{R} \text{ lineal}$$

Proposición: $\vec{H}$ es un hiperplano vectorial

$$\Updownarrow$$

$\exists$ forma lineal f no nula tq. $\vec{H} = \operatorname{Ker} f$

Demostración:

$\Leftarrow$ $f: V \longrightarrow \mathbb{R}$ no nula $\Longleftrightarrow \exists\, a \in V$ tq $f(a) \neq 0$

Demostraremos que $V = \operatorname{Ker}(f) \oplus \langle a \rangle \Longrightarrow \operatorname{Ker}(f)$ es un hiperplano

- $v \in \operatorname{Ker}(f) \cap \langle a \rangle$:

$$\left.\begin{array}{l} v = \lambda a \Longrightarrow f(v) = \lambda f(a) \\ f(v) = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \lambda f(a) = 0 \overset{(f(a)\neq 0)}{\Downarrow} \lambda = 0 \Downarrow v = 0$$

$$\operatorname{Ker}(f) \cap \langle a \rangle = \{0_V\}$$

- Sea v un vector cualquiera:

$$v = \underbrace{\left(v - \frac{f(v)}{f(a)}a\right)}_{\in \operatorname{Ker} f} + \underbrace{\frac{f(v)}{f(a)}}_{\in\langle a\rangle} a = w + z, \text{ con } w \in \operatorname{Ker} f \text{ y } z \in \langle a \rangle$$

$f(a) \neq 0$

$\in \operatorname{Ker} f$ ya que $f\left(v - \frac{f(v)}{f(a)}a\right) = f(v) - \frac{f(v)}{\cancel{f(a)}}\cancel{f(a)} = 0$

$$\Downarrow$$

$V = \operatorname{Ker} f \oplus \langle a \rangle$, C.Q.D.

$\Rightarrow)$ $\vec{H}$ es hiperplano

$$\Updownarrow$$

$$V = \vec{H} \oplus \langle a \rangle$$

definimos:

$$f: V \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$v = h + \lambda a \longrightarrow f(v) = \lambda$$
$$h \in \vec{H}$$

que:

- Está bien definida: todo vector v se puede descomponer ya que $V = \vec{H} \oplus \langle a \rangle$

- Es lineal: $f(rv + sw) = f(r(h + \lambda a) + s(h' + \mu a)) =$

$$= f(\underbrace{(rh + sh')}_{\in \vec{H}} + \underbrace{(r\lambda + s\mu)a}_{\in \langle a \rangle}) = r\lambda + s\mu =$$

$$= \boxed{r f(v) + s f(w) = f(rv + sw)} \text{, C.Q.D.}$$

- Es no nula: $f(a) = f(0 + 1 \cdot a) = 1 \neq 0$

Sea A un espacio afín sobre V y f una forma lineal no nula en V.

Para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, el cjto. de puntos

$$H_\lambda = \{ p \in A \,/\, f(\vec{Op}) = \lambda \}$$ (obviamente, depende de λ)

es un hiperplano afín, cuya dirección es

$$\vec{H} = \{ v \in V \,/\, f(v) = 0 \}$$ (que no depende de λ)

(Como se ve, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ H_λ y H_μ son paralelos)

Demostración:

- Como $\vec{H} = \operatorname{Ker} f$, $\vec{H}$ es un hiperplano vectorial
- Como $f \neq 0$, $\exists\, a \in V$ tq $f(a) = 1$. Tomo el punto:

$\exists\, b$ tq $f(b) \neq 0$. $a = \frac{1}{f(b)} b$, $f(a) = \frac{1}{f(b)} f(b)$

$$p_0 = O + \lambda a \in H_\lambda$$ ya que $f(\vec{Op_0}) = f(\lambda a) = \lambda$

Y $\forall p \in H_\lambda$ $f(\vec{Op}) = \lambda$

$$f(\vec{Op_0} + \vec{p_0p}) \underset{f \text{ es lineal}}{=} \lambda + f(\vec{p_0p}) \Rightarrow f(\vec{p_0p}) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{p_0p} \in \operatorname{Ker} f = \vec{H}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{p = p_0 + \vec{H} \quad \forall p \in H}$$

C.Q.D.

+ La ecuación de un hiperplano afín es prácticamente única:

$$H \begin{cases} f(\overrightarrow{OP}) = \lambda \\ g(\overrightarrow{OP}) = \mu \end{cases}$$

Entonces $\exists k \neq 0$ tq $f = kg$ y $\lambda = k\mu$

Es decir:

$$H_{\lambda_f} = H_{\mu_g} \iff \exists k \neq 0 \text{ tq } \begin{cases} f = kg \\ \lambda = k\mu \end{cases}$$

Si elegimos un S.R. $\mathcal{R} = (O, \{e_i\})$

$\{e_i\}$ tiene una base dual en V^* $\{\varepsilon^i\}$ (significa que $\varepsilon^i(e_j) = \delta^i_j$)

$p \in H_\lambda$; $\vec{Op} = x^1 e_1 + \dots + x^n e_n$

$\Updownarrow$

$f(\vec{Op}) = \lambda = (a_i \varepsilon^i)(x^j e_j) = a_i x^j \varepsilon^i(e_j) \Rightarrow$ Aquí la mayoría de los sumandos son 0 (menos aquellos con $i = j$)

$\Downarrow$

$\lambda = a_i x^i$

Así, $\boxed{H_\lambda = \{p \in A / \sum_{i=1}^{n} a_i x^i = \lambda\}}$

Recordemos que habíamos dado un subespacio por:

> $S = \{p \in A / A^j_i x^i = l^j \quad j: 1, \dots, m\}$ dim $s = n - m$
>
> es la intersección de m hiperplanos "bien situados" (el sistema es compatible, ecuaciones independientes...)

ESTRUCTURA AFÍN EUCLÍDEA

Sea A un espacio afín sobre V.

Supondremos ahora que V es un espacio vectorial euclídeo:

- Espacio vectorial real
- Con un producto escalar:

$$< , >: V \times V \longrightarrow \mathbb{R} \quad \begin{cases} \text{- Bilineal} \\ \text{- Simétrica} \\ \text{- Definida positiva} \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\| \ \|: V \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

$$v \longrightarrow \|v\| = \sqrt{<v,v>}$$

- Donde se cumple Cauchy - Schwartz:

$$|<u, v>| \leq \|u\| \cdot \|v\|$$

$$\Downarrow \text{ Permite definir}$$

Ángulo entre dos vectores: $\cos\varphi = \dfrac{<u, v>}{\|u\| \cdot \|v\|}$; $\varphi \in [0, \pi]$

- También se cumple Minkowski:

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

- Y Pitágoras:

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$$

$$\Updownarrow$$

u y v son ortogonales $\Longleftrightarrow$ $<u, v> = 0$

$\boxed{\text{Espacio afín euclídeo: es un espacio afín cuyo espacio vectorial subyacente es un espacio euclídeo.}}$

Así, definimos la distancia:

$$\boxed{\begin{aligned} d: A\times A &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ (p,q) &\longrightarrow d(p,q) = \|\overrightarrow{pq}\| \rightarrow \text{distancia entre } p \text{ y } q \end{aligned}}$$

Por las propiedades de la norma, se cumple:

1. $d(p,q) \geq 0$
2. $d(p,q) = 0 \Leftrightarrow p = q$
3. $d(p,q) = d(q,p)$
4. $d(p,r) \leq d(p,q) + d(q,r)$ → Minkowski
5. $d(p,r) \geq |d(p,q) - d(q,r)|$

Ortogonalidad

u y v son ortogonales cuando $\langle u,v\rangle = 0 \Leftrightarrow \widehat{u,v} = \frac{\pi}{2}$

Y si W es un subespacio vectorial,

$$W^{\perp} = \{x \in V / \langle x,y\rangle = 0, \forall y \in W\}$$

Se cumple $W \oplus W^{\perp} = V$

Perpendicularidad

Definición: dos subespacios afines $S = p_0 + \vec{S}$ y $T = q_0 + \vec{T}$ se dicen perpendiculares cuando:

- $S \cap T \neq \emptyset$
- $\vec{S}$ y $\vec{T}$ son ortogonales $\Leftrightarrow \langle u, v \rangle = 0 \quad \forall u \in \vec{S} \quad \forall v \in \vec{T}$

$$\Updownarrow$$

$$\vec{S} \subset \vec{T}^{\perp} \Leftrightarrow \vec{T} \subset \vec{S}^{\perp}$$

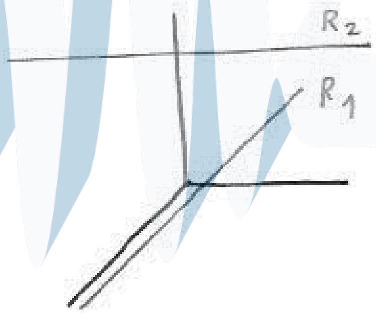
Ejemplo:

$R_1 : (0,0,0) + \lambda(1,0,0) \qquad \vec{R_1} = \{(x,0,0)\}$

$R_2 : (0,0,1) + \mu(0,1,0) \qquad \vec{R_2} = \{(0,y,0)\}$

$\left.\right\}$ ortogonales respecto al p.e. canónico

Pero como $R_1 \cap R_2 = \emptyset \Rightarrow$ NO SON PERPENDICULARES



Ecuación normal de un hiperplano

Fijado un S.R., $H_\lambda = \{p \in A / a_1 x^1 + \ldots + a_n x^n = \lambda\}$, con algún $a_i \neq 0$

$$\Updownarrow$$

$$\lambda = (a_1 \ldots a_n) \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \langle n, x \rangle \text{ definido}$$

$n = a_1 e_1 + \ldots + a_n e_n$

$x = x^1 e_1 + \ldots + x_n e_n$

Los fon b tanto, restando: $0 = \langle n, x \rangle - \langle n, y \rangle$

con x e $y \in H$

$$\Updownarrow$$

$0 = \langle n, x - y \rangle$

$$\Downarrow$$

n es $\perp$ al hiperplano

A n se le llama vector ortogonal al hiperplano H_λ.

Elegimos n de tal forma que sea unitario. Así:

$$n = u \cdot \|n\|; \text{ con } \|u\| = 1$$

Así, $H_\lambda = \{ p \in A \,/\, \|n\| \langle u, x \rangle = \lambda \} = \boxed{\{ p \in A \,/\, \langle u, x \rangle = \lambda' \}}$

$\Downarrow$

Ecuación normal del hiperplano

Referencia ortonormal o cartesiana

Un S.R. $\mathcal{R} = (O, \{e_i\})$ en un espacio afín euclídeo es ortonormal o cartesiano cuando $\{e_i\}$ es una base ortonormal.

* Los ejes coordenados $(O + \lambda e_i)$ son perpendiculares.

Proyecciones y simetrías ortogonales

Recordemos:

$$\left.\begin{array}{l} S = p_0 + \vec{S} \\ T = q_0 + \vec{T} \end{array}\right\} \text{suplementarios } (\vec{S} \oplus \vec{T} = V)$$

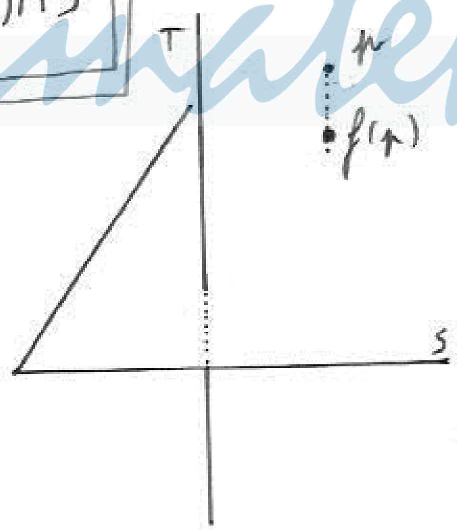
Habíamos definido:

$$p_T : \begin{array}{l} A \longrightarrow A \\ p \longrightarrow (p+\vec{S}) \cap T = r_0 + V \,/\, \vec{r_0 p} = \underset{\vec{S}}{\overset{\cap}{u}} + \underset{\vec{T}}{\overset{\cap}{V}} \end{array}$$

Si el espacio afín es euclídeo, como $\forall \vec{S}\,;\ \vec{S} \oplus \vec{S}^{\perp} = V$, podemos definir la

Proyección ortogonal sobre S: proyección sobre S paralelamente a $T = r_0 + \vec{S}^{\perp}$

$$\begin{array}{l} A \longrightarrow A \\ p \longrightarrow (p+\vec{S}^{\perp}) \cap S \end{array}$$



Análogamente, definimos:

Simetría ortogonal respecto al subespacio S: $sim_S(p)$ es el punto que cumple que el pto medio entre p y $sim_S(p)$ es la proyección ortogonal de p en S.

Distancias

Sean S y T dos subconjuntos cualesquiera de A, espacio afín euclídeo.

Definición: se denomina distancia entre S y T a:

$$d(S,T) = \inf\{d(p,q) \,/\, p \in S, q \in T\}$$

Si $S = \{p_0\}$, se suele denotar $d(p_0, T)$

Corolario: $S \cap T \neq \emptyset \Rightarrow d(S,T) = 0$

Demostración:

$$S \cap T \neq \emptyset \Rightarrow \exists\, r_0 \text{ tq } \begin{matrix} r_0 \in S \\ r_0 \in T \end{matrix} \Rightarrow d(r_0, r_0) = 0$$

$\Downarrow$ las distancias son ≥ 0

$$d(S,T) = 0$$

Proposición: si S es un subespacio afín y $p \in A$:

$$d(p,S) = d(p,q)$$

donde q es la proyección ortogonal de p en S

$$q = (p + \vec{S}^{\perp}) \cap S \Rightarrow \begin{cases} q \in p + \vec{S}^{\perp} \Leftrightarrow \vec{pq} \in \vec{S}^{\perp} \\ q \in S \Rightarrow S = q + \vec{S} \end{cases}$$

Demostración:

$$\vec{pq} \in \vec{S}^{\perp}$$

Ahora, $\forall q' \in S$, $\vec{pq} = \vec{pq'} + \vec{q'q}$

$$\vec{pq'} = \vec{pq} + \vec{qq'} \Longrightarrow \|\vec{pq'}\|^2 = \|\vec{pq}\|^2 + \|\vec{qq'}\|^2 \geq \|\vec{pq}\|^2$$

$\vec{pq}$ y $\vec{qq'}$ son ortogonales ; $\underset{q+\vec{v}}{\overset{\|}{q' \in S}} \Rightarrow \vec{qq'} \in \vec{S}$

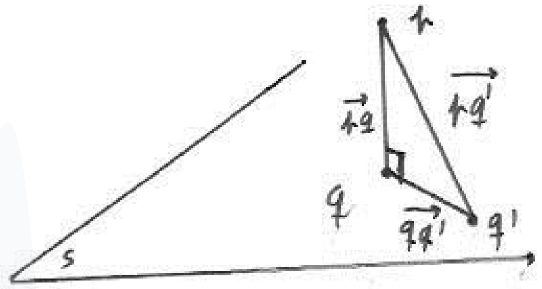
Es decir:

$$\|\vec{pq'}\|^2 \geq \|\vec{pq}\|^2$$

$$\Downarrow \text{ Tomamos raíces}$$

$$\|\vec{pq'}\| \geq \|\vec{pq}\| \quad \forall q' \in S$$

Así, como hay que tomar el ínfimo, $d(p,S) = d(p,q)$ c.q.d.



Ejemplo

En $\mathbb{R}^4$

$p = (1,0,1,0)$

$\vec{S} = \lambda(1,0,0,0) + \mu(1,0,0,1)$

¿$d(p,S)$?

1) Hallamos la proyección ortogonal de p en S

$\dim \vec{S}^\perp = 2$ ($\dim \vec{S} = 2$): $(a \; b \; c \; d)\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} = 0;\ a = 0$

$(a \; b \; c \; d)\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} = 0;\ a + d = 0;\ d = 0$

$$\vec{S}^\perp = \alpha(0,1,0,0) + \beta(0,0,1,0)$$

Así, $T = p + \vec{S}^\perp = (1,0,1,0) + \alpha(0,1,0,0) + \beta(0,0,1,0)$

SAT:

$$\begin{cases} \lambda+\mu=1;\ \lambda=1 \\ 0=\alpha \\ 0=1+\beta;\ \beta=-1 \\ \mu=0 \end{cases}$$

Usamos $\begin{cases} \lambda=1 \\ \mu=0 \end{cases} \Rightarrow proy_S(p) = (1,0,0,0)+0\cdot(1,0,0,1)=(1,0,0,0)$

2) Aplicamos la proposición

$d(p,S)=d(p,proy_S(p))=\|\overrightarrow{p\,proy_S(p)}\|=\|(0,0,-1,0)\|=\boxed{1}$

¿ $sim_S(p)$?

$sim_S(p)=n \;/\; \overrightarrow{nq}=\overrightarrow{qp};\ q=proy_S(p)$

$\overrightarrow{nq}=(0,0,1,0)=(1-a,-b,-c,-d)$

$$\begin{cases} a=1 \\ b=0 \\ c=-1 \\ d=0 \end{cases}$$

$$\boxed{sim_S(p)=(1,0,-1,0)}$$

IKASLEEN ERREKTOREORDETZA
VICERRECTORADO DE ALUMNADO

Universidad del País Vasco — Euskal Herriko Unibertsitatea

Pero, ¿y si tenemos dos subespacios cualesquiera?

Proposición: cualesquiera que sean S y T subespacios de A, existe un subespacio R perpendicular a ambos.

(Ojo, no hemos dicho que sea único)

Demostración:

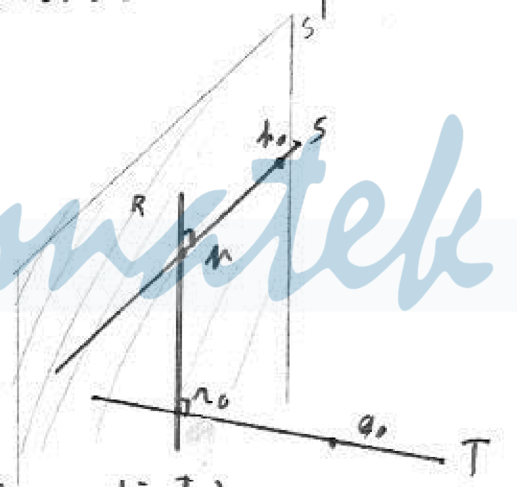
- Si $S \cap T \neq \emptyset$ sea $r_0 \in S \cap T$

Consideramos $R = r_0 + (\vec{S} + \vec{T})^\perp$

Como:

- Tienen un punto en común (r_0)
- $(\vec{S} + \vec{T})^\perp = \vec{S}^\perp \cap \vec{T}^\perp$, ortogonal tanto a $\vec{S}$ como a $\vec{T}$

R es perpendicular a $\vec{S}$ y $\vec{T}$



- Si $S \cap T = \emptyset$, sea $p_0 \in S$ y $T = q_0 + \vec{T}$

Consideramos $S' = p_0 + (\vec{S} + \vec{T})^\perp + \vec{S}$

Ahora, $S' \cap T \neq \emptyset$:

$$\overrightarrow{p_0 q_0} \in (\vec{S} + \vec{T})^\perp + (\vec{S} + \vec{T}) = V \text{ (la suma es directa)}$$

Si S y T son planos $S' \cap T = A$!!!

~~$S' \cap T \neq \emptyset$~~ Sea $r_0 \in T \cap S'$

Definimos $R = r_0 + (\vec{S} + \vec{T})^\perp$, que cumple:

- $R \cap T = r_0 \neq \emptyset$
- $\vec{T} \perp (\vec{S} + \vec{T})^\perp$, por razones análogas a las de antes

} R y T son perpendiculares

- $S \cap R \neq \emptyset$

$$\overrightarrow{p_0 r_0} \in (\vec{S} + \vec{T})^\perp \oplus \vec{S} = u + v \,;\, (\underbrace{r_0 - u}_{\in R}) = (\underbrace{p_0 + v}_{\in S}) \Rightarrow p_0 \in S \cap R$$

· $S \cap T = \emptyset$

- Sean: $S = p_0 + \vec{S}$

  $T = q_0 + \vec{T}$

- Definimos $S' = p_0 + (\vec{S} + \vec{T})^{\perp} + \vec{S}$

- $S' \cap T \neq \emptyset$:

$$\vec{S'} + \vec{T} = (\vec{S} + \vec{T})^{\perp} + \vec{S} + \vec{T} = (\vec{S} + \vec{T})^{\perp} + (\vec{S} + \vec{T}) = V$$

Por lo tanto, $\overrightarrow{p_0 q_0} \in \vec{S'} + \vec{T}$

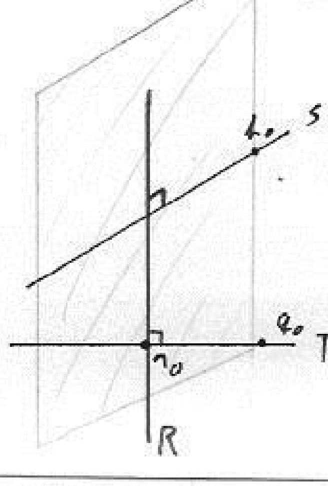
$$\Updownarrow$$

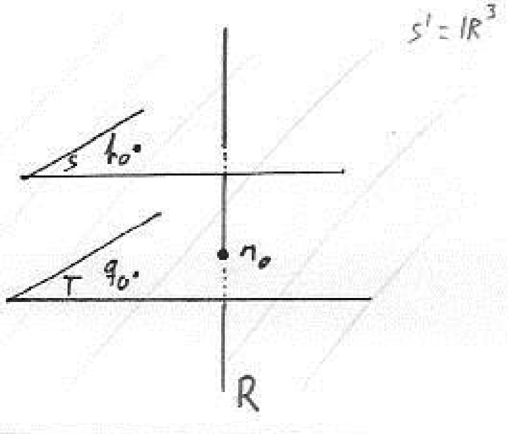
$$S' \cap T \neq \emptyset$$

- Sea $r_0 \in S' \cap T$. Definimos $\boxed{R = r_0 + (\vec{S} + \vec{T})^{\perp}}$, que cumple:

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ R \cap T \neq \emptyset \text{; ya que } r_0 \in T \\ \bullet\ \vec{R} \perp \vec{T} \text{; ya que } \vec{R} = (\vec{S} + \vec{T})^{\perp} = \vec{S}^{\perp} \cap \vec{T}^{\perp} \subseteq \vec{T}^{\perp} \end{array}\right\} R \perp T$$

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ R \cap S \neq \emptyset \text{; porque como } r_0 \in S' \\ \qquad \Updownarrow \\ \qquad \overrightarrow{p_0 r_0} \in (\vec{S} + \vec{T})^{\perp} + \vec{S} \\ \qquad \overrightarrow{p_0 r_0} \in \vec{R} + \vec{S} \\ \qquad \Updownarrow \\ \qquad R \cap S \neq \emptyset \\ \bullet\ \vec{R} \perp \vec{S} \text{; porque } \vec{R} = (\vec{S} + \vec{T})^{\perp} = \vec{S}^{\perp} \cap \vec{T}^{\perp} \subseteq \vec{S}^{\perp} \end{array}\right\} R \perp S$$





Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

IKASLEEN ERREKTOREORDETZA
VICERRECTORADO DE ALUMNADO

• $\vec{S} \perp (\vec{S}+\vec{T})^{\perp}$

$d(S,T) = d(p,q)$, siendo $p = S \cap P$, $q = T \cap P$, con P un subespacio perpendicular a ambas

Demostración:

$\forall a \in S$

$\forall l \in T$

Nota: $P = p + \vec{P}$

$q \in P \Rightarrow \vec{pq} \in \vec{P} = (\vec{S}+\vec{T})^{\perp}$ (ambas)

$S = a + \vec{S}$

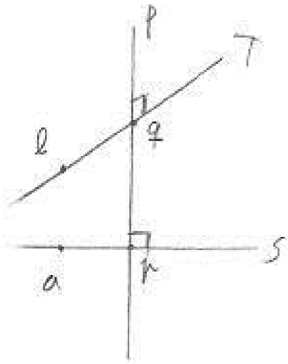
$p \in S \Rightarrow \vec{ap} \in \vec{S}$

$T = l + \vec{T}$

$q \in T \Rightarrow \vec{lq} \in \vec{T}$

Sea $r = a + \vec{pq}$ ($\Leftrightarrow \vec{ar} = \vec{pq}$)

$d(a,r) = d(a, a+\vec{pq}) = \|\overrightarrow{a(a+pq)}\| = \|\vec{pq}\| = d(p,q)$



Ahora, $\vec{al} = \vec{ar} + \vec{rl}$, luego:

• $\vec{ar} = \vec{pq} \in \vec{P} \Longrightarrow \vec{ar} \in (\vec{S}+\vec{T})^{\perp}$

• $\vec{rl}$: $\vec{ar} = \vec{pq} \Leftrightarrow \vec{ap} = \vec{rq} = \vec{rl} + \vec{lq}$

Así, $\vec{rl} = \underbrace{\vec{ap}}_{\in \vec{S}} - \underbrace{\vec{lq}}_{\in \vec{T}} \Longrightarrow \vec{rl} \in (\vec{S}+\vec{T})$

Como $\vec{ar} \in (\vec{S}+\vec{T})^{\perp}$ ortogonal a todo vector de $\vec{S}+\vec{T}$
$\vec{rl} \in (\vec{S}+\vec{T})$ $\Longrightarrow$ $\vec{ar}$ y $\vec{rl}$ son ortogonales

$\Downarrow$ Pitágoras

$\|\vec{al}\|^2 = \|\vec{ar}\|^2 + \|\vec{rl}\|^2 \geq \|\vec{ar}\|^2$

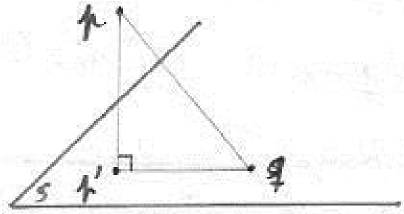
(Tomamos raíces)

$d(a,l) \geq d(a,r) = d(p,q)$

En definitiva, $\forall a \in S$, $\forall l \in T$ $\boxed{d(a,l) \geq d(p,q)}$ C.Q.D.

Proposición 1:

Gráficamente, con un plano en $\mathbb{R}^3$:



Por la definición de proyección ortogonal: $p' = (p + \vec{S}^{\perp}) \cap S$

Así, como $p' \in p + \vec{S}^{\perp} \Leftrightarrow \overrightarrow{pp'} \in \vec{S}^{\perp}$

Además, $p' \in S$

Para cualquier otro punto q de S, $d(p,q) = \|\overrightarrow{pq}\|$

Separemos $\overrightarrow{pq}$ con un punto intermedio: $\overrightarrow{pq} = \overrightarrow{pp'} + \overrightarrow{p'q}$

Ahora: · $\overrightarrow{pp'} \in \vec{S}^{\perp}$

· $\overrightarrow{p'q} \in \vec{S}$ porque tanto p' como q son de S. Otra manera de verlo es que, como $p' \in S$; S se puede reescribir como $S = p' + \vec{S}$, y como $q \in S$; $q \in p' + \vec{S} \Leftrightarrow \overrightarrow{p'q} \in \vec{S}$

Por lo que $\overrightarrow{pp'}$ y $\overrightarrow{p'q}$ son ortogonales, así que se puede aplicar el teorema de Pitágoras:

$$\|\overrightarrow{pp'} + \overrightarrow{p'q}\|^2 = \|\overrightarrow{pp'}\|^2 + \|\overrightarrow{p'q}\|^2$$

$$\|\overrightarrow{pq}\|^2 = \|\overrightarrow{pp'}\|^2 + \|\overrightarrow{p'q}\|^2 \geq \|\overrightarrow{pp'}\|^2$$

Al ser $\|\overrightarrow{p'q}\|^2$ un cuadrado, es positivo

$$\|\overrightarrow{pq}\|^2 \geq \|\overrightarrow{pp'}\|^2$$

$$\|\overrightarrow{pq}\| \geq \|\overrightarrow{pp'}\|$$

$$\boxed{d(p,q) \geq d(p,p') \quad \forall q \in S}$$

→ Y como la distancia la da el ínfimo, $d(p,S) = d(p,p')$

Corolario 2:

$$H: a_1 x_1 + \dots + a_n x_n + a_{n+1} = 0$$

$$a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = -a_{n+1}$$

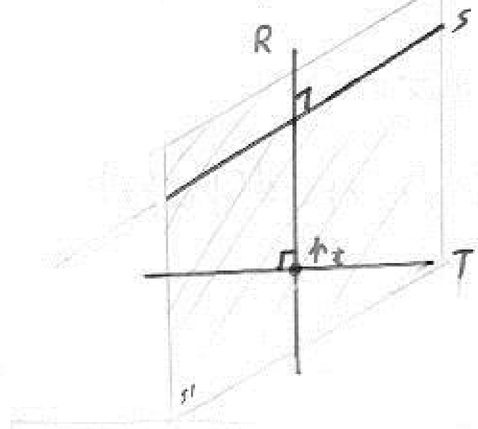
El vector $(a_1, \dots, a_n)$ es lo que en el C1 hemos llamado n y $-a_{n+1}$ lo que hemos llamado λ. Por lo tanto:

$$d(p,H) = \frac{|\overset{n}{\overset{\parallel}{(a_1, \dots, a_n)}} \cdot \overset{\overrightarrow{Op}}{\overset{\parallel}{(p_1, \dots, p_n)}} - (-a_{n+1})|}{\|(a_1, \dots, a_n)\|}$$

Ahora, al ser el S.R. ortonormal, el producto escalar se hace multiplicando componentes:

$$\boxed{d(p,H) = \frac{|a_1 p_1 + \dots + a_n p_n + a_{n+1}|}{\sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}}}$$

Gráficamente, en $\mathbb{R}^3$ con dos rectas que se cruzan, esto es lo que hemos hecho:



② $d(S,T) = d(p_S, p_T)$

Para cualesquiera $a \in S$ y $b \in T$. Consideramos $c = a + \overrightarrow{p_S p_T}$

$$\Updownarrow$$

$$\overrightarrow{ac} = \overrightarrow{p_S p_T}$$

$$\Downarrow$$

$$\|\overrightarrow{ac}\| = \|\overrightarrow{p_S p_T}\|$$

$$\Downarrow$$

$$d(a,c) = d(p_S, p_T)$$

Ahora, descomponemos el vector $\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{ac} + \overrightarrow{cb}$. Pero $\overrightarrow{ac}$ y $\overrightarrow{cb}$ resultan ser ortogonales:

- $\overrightarrow{ac} = \overrightarrow{p_S p_T} \in (\vec{S} + \vec{T})^\perp$, por pertenecer p_S y p_T a la perpendicular común, cuya dirección es, como hemos visto antes, $(\vec{S} + \vec{T})^\perp$
- $\overrightarrow{cb}$: Como $\overrightarrow{ac} = \overrightarrow{p_S p_T} \iff \overrightarrow{a p_S} = \overrightarrow{c p_T} = \overrightarrow{cb} + \overrightarrow{b p_T}$

$$\overrightarrow{cb} = \underbrace{\overrightarrow{a p_S}}_{\substack{\in \vec{S} \text{ pq} \\ a \in S \text{ y } p_S \in S}} - \underbrace{\overrightarrow{b p_T}}_{\substack{\in \vec{T} \text{ pq} \\ b \in T \text{ y } p_T \in T}}$$

. Como se puede escribir como suma de un vector de $\vec{S}$ y uno de $\vec{T}$, $\overrightarrow{cb} \in (\vec{S} + \vec{T})$

Por lo tanto, aplicamos Pitágoras:

$$\|\overrightarrow{ab}\|^2 = \|\overrightarrow{ac}\|^2 + \|\overrightarrow{cb}\|^2 \geq \|\overrightarrow{ac}\|^2$$

la intersección de dos subespacios perpendiculares es un único punto (♂)

Si bien R no es único, $R \cap S = \{p\}$ y $R \cap T = \{q\}$

$$\boxed{\underline{\text{Proposición}}: \ d(S,T) = d(p,q)}$$

Movimientos y semejanzas

Definición: sea A un espacio afín euclídeo. Un <u>movimiento</u> en A es una aplicación:

$$\begin{aligned} f: A &\longrightarrow A \\ p &\longrightarrow f(p) \end{aligned}$$

que cumple: $$d(f(p), f(q)) = d(p,q) \quad \forall p,q \in A$$

(conserva las distancias)

Proposición: sea $f: A \to A$ un movimiento. Son equivalentes:

i) f es un movimiento

ii) f es una <u>aplicación afín</u> cuya aplicación lineal inducida es una <u>isometría</u>

<u>Demostración</u>: ($i \Rightarrow ii$)

Sea $p_0 \in A$

Sean $\left.\begin{aligned} p &= p_0 + u \\ q &= p_0 + v \end{aligned}\right\} \langle \vec{f}(u), \vec{f}(v) \rangle = \langle \vec{f}(\overrightarrow{p_0 p}), \vec{f}(\overrightarrow{p_0 q}) \rangle \overset{\text{def. de } \vec{f}}{=}$

$= \langle \overrightarrow{f(p_0) f(p)}, \overrightarrow{f(p_0) f(q)} \rangle$. Ahora, como $-\langle x,y \rangle = \frac{1}{2}(\|x-y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2)$:

todo con $-$

$$<\vec{f}(u),\vec{f}(v)> = -\frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{f(p)f(q)}\|^2 - \|\overrightarrow{f(p_0)f(p)}\|^2 - \|\overrightarrow{f(p_0)f(q)}\|^2\right) \overset{\uparrow}{=}$$

f es movimiento

$$= -\frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{pq}\|^2 - \|\overrightarrow{p_0p}\|^2 - \|\overrightarrow{p_0q}\|^2\right) = <\overrightarrow{p_0p},\overrightarrow{p_0q}> = <u,v>$$

$\Downarrow$

$\vec{f}$ conserva el prod. escalar

$\Updownarrow$

$\vec{f}$ es isometría

$\Downarrow$

$\vec{f}$ es lineal $\Rightarrow f$ es afín

ii) $\Rightarrow$ i) es inmediato

Sea $M(A)$ el cjto. de todos los movimientos:

$$M(A) = \{F: A \longrightarrow A \,/\, d(F(p),F(q)) = d(p,q) \quad \forall p,q \in A\}$$

Ahora, si F y G son movimientos:

- $F\circ G \in M(A) \Rightarrow \circ$ es operación interna
- $(F\circ G)\circ H = F\circ(G\circ H) = F\circ G\circ H \Rightarrow \circ$ es asociativa
- $id_A : A \longrightarrow A$ es un movimiento $\Rightarrow \circ$ tiene elemento neutro
- como las isometrías son biyectivas, si F es movimiento, F^{-1} existe y es un movimiento $\Rightarrow \circ$ tiene elemento inverso
- En general, $F\circ G \neq G\circ F$

Así, $\boxed{M(A) \text{ es un subgrupo no conmutativo de } GA(A)}$

2a) $l_1 \neq 0$: 1ª ecuación imposible $\Longrightarrow$ No hay puntos fijos

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ l_2 \end{pmatrix} + S(0)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{2b)} \Rightarrow \text{Es hacer:}$$

- Primero una simetría
- Después una traslación en dirección del eje de simetría

$\Downarrow$

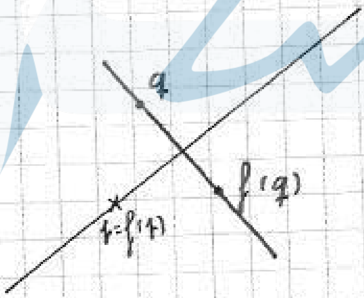
<u>Simetría con deslizamiento</u>

Hay una recta invariante (eje de simetría)

2b) $l_1 = 0$: $2y = l_2 \Rightarrow$ recta de puntos invariantes. Tomando como origen un pto. invariante:

$$F\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x} \\ -\bar{y} \end{pmatrix}$$

* Una <u>simetría ortogonal</u> respecto a la <u>recta de puntos fijos</u>
* Las rectas perpendiculares a la recta de puntos fijos son invariantes.



Valores propios	Puntos fijos	Aplicación	Invariant…
1 doble	Todos	Identidad	$\mathbb{R}^2$
	Ninguno	Traslación	Rectas // a l_1…
$\notin \mathbb{R}$	Único	Rotación de ángulo $\alpha \in (0, \pi)$	
-1 doble	Único	Simetría central resp. del pto. fijo	Cualquier recta que pase por el pto. f…
1 y -1	Recta	Simetría axial (ortogonal) respecto de la recta fija	Recta $\perp$ eje
	Ninguno	Simetría con deslizamiento	Recta d… simetr…

Movimientos en $\mathbb{R}^3$

Las matrices ortogonales son de dos tipos:

$$R(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha & 0 \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha & 0 \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Los movimientos serán de dos tipos:

① $F\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l^1 \\ l^2 \\ l^3 \end{pmatrix} + R(\alpha)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

② $F\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l^1 \\ l^2 \\ l^3 \end{pmatrix} + T(\alpha)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

· Casos:

1) Buscamos puntos fijos:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l^1 \\ l^2 \\ l^3 \end{pmatrix} + R(\alpha)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} (\cos\alpha - 1)x - \operatorname{sen}\alpha\, y + l^1 = 0 \\ \operatorname{sen}\alpha\, x + (\cos\alpha - 1)y + l^2 = 0 \\ z = l^3 + z \end{cases}$$

$\boxed{l^3 \neq 0 \Rightarrow \text{no hay puntos fijos}}$

1a): $\alpha = 0 \Rightarrow R(\alpha) = I_3 \Rightarrow$ Traslación de vector $\begin{pmatrix} l^1 \\ l^2 \\ l^3 \end{pmatrix}$

* Si $l^1 = l^2 = l^3 = 0$, todos los puntos son invariantes. En cualquier otro caso, no hay puntos invariantes.
* Valores propios $\Rightarrow$ 1 triple

* $~~(l^1)^2 + (l^2)^2 + (l^3)^2 \neq 0~~ \Rightarrow$ · Las rectas de dirección (l^1, l^2, l^3)

$(l^1, l^2, l^3) \neq (0,0,0)$ · Los planos cuya dirección contiene al (l^1, l^2, l^3)

$\Downarrow$

SON INVARIANTES

1 h): $\alpha \neq 0$ y $l^3 = 0$: $|A| \neq 0 \Rightarrow$ existe solución para la ecuación de puntos fijos: (c^1, c^2, z), que es una recta en la dirección de e_3.

$\alpha \neq \pi$

Trasladando el origen de coordenadas a un punto fijo, queda:

$$F\begin{pmatrix}\bar{x}\\ \bar{y}\\ \bar{z}\end{pmatrix} = R(\alpha)\begin{pmatrix}\bar{x}\\ \bar{y}\\ \bar{z}\end{pmatrix}$$

$\Downarrow$

Giro de ángulo α de eje la recta de puntos fijos.

* Cualquier plano perpendicular al eje de rotación es invariante
* Si $\alpha \neq \pi$, no hay otras rectas invariantes.
* El único valor propio real es 1

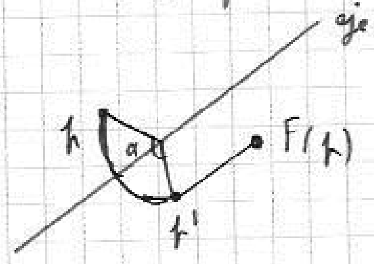
1 h'): $\alpha = \pi$ y $l^3 = 0$: es una simetría axial respecto de la recta de puntos fijos.

* Los valores propios son 1 y -1 doble
* Las rectas perpendiculares al eje son invariantes
* Los planos perpendiculares al eje son invariantes

1c): $\alpha \neq 0$ y $l^3 \neq 0$
$\alpha \neq \pi$

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l^3 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} l^1 \\ l^2 \\ 0 \end{pmatrix} + R(\alpha)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\text{casos } 1(b) \text{ y } 1(b)'}$$

Es un giro sobre un eje seguido de una traslación en la dirección del eje.



A esto se le denomina movimiento helicoidal.

* El eje es lo único invariante
* El único valor propio real es 1

1c'): $\alpha = \pi$ y $l^3 \neq 0$

Es una simetría axial con desplazamiento.

* El eje es [illegible] invariante
* Cualquier plano paralelo al eje con el eje contenido en él es invariante
* Los valores propios son 1 y -1 doble

Ángulo + ¿traslado?

Valores propios reales	Puntos fijos	Aplicación	Invar.
1 triple	$\mathbb{R}^3$	Identidad	
	$\emptyset$	Traslación	Rectas de dir (l_1, l_2, l_3) y planos ⊇ $\vec{v}$
1, $\notin \mathbb{R}$	Una recta	Giro de eje la recta y amplitud $\alpha \neq 0, \pi$	Planos ⊥ a recta
	$\emptyset$	Giro seguido de traslación (helicoidal)	Eje
1 y −1 doble	Una recta	Simetría respecto de la recta	Recta y planos ⊥ al eje
	$\emptyset$	Simetría seguida de una traslación (o traslación seguida de simetría)	Eje, π // al eje conteniendo a él

Las traslaciones son en la dirección del eje de giro
(los ptos invariantes tienen de $\to$ $V(1)$)

Veamos la otra matriz:

2) Busquemos puntos fijos:

$$\begin{cases} (\cos\alpha - 1)x - \operatorname{sen}\alpha\, y + l^1 = 0 \\ \operatorname{sen}\alpha\, x + (\cos\alpha - 1)y + l^2 = 0 \\ z = l^3 - z \end{cases}$$

$\Downarrow$

Aquí no tenemos la restricción de $l^3 = 0$

2a) : $\alpha = 0$:

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l^1 \\ l^2 \\ l^3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \\ -z \end{pmatrix}$$

- * $(l^1, l^2) \neq (0,0) \to$ No hay ptos fijos (ecuaciones incompatibles)
- * $(l^1, l^2) = (0,0) \to$ la recta $l^3/2$ es una recta de puntos fijos
- * Los valores propios son 1 doble y −1

2a1): $(l^1,l^2)=(0,0)$: cambiando el S.R. para que el origen sea fijo:

$$F\begin{pmatrix}\bar x\\ \bar y\\ \bar z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\bar x\\ \bar y\\ -\bar z\end{pmatrix}$$

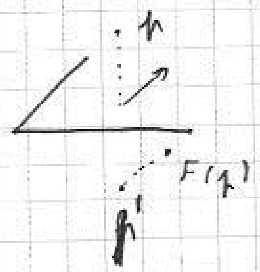
Simetría respecto del plano $\bar z=0$ (el plano $z=\frac{l^3}{2}$)

* Las rectas perpendiculares al plano de simetría son invariantes
* Los planos perpendiculares al plano de simetría son invariantes

2a2): $(l^1,l^2)\neq(0,0)$: se puede reescribir:

$$F\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}l^1\\ l^2\\ 0\end{pmatrix}+\underbrace{\begin{pmatrix}0\\ 0\\ l^3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x\\ y\\ -z\end{pmatrix}}_{2a1)}$$

Simetría respecto de un plano seguido de una traslación en la dirección del plano.



2b): $\alpha=\pi$

La matriz es $-I_3$, y las ecuaciones $\begin{cases}2x=l^1\\ 2y=l^2\\ 2z=l^3\end{cases}$

* Valores propios: -1 triple
* Un único punto fijo

Trasladando el origen: $F\begin{pmatrix}\bar x\\ \bar y\\ \bar z\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}\bar x\\ \bar y\\ \bar z\end{pmatrix}$: Simetría respecto de un punto

2c) : $\alpha \neq 0 \neq \pi$

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha & 0 \\ +\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\text{El caso 2a)}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha & 0 \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{R(\alpha)}$$

Simetría respecto de
- Plano
  - ¿Traslado?
  - ¿Roto?
- Origen

Valores propios reales	Puntos fijos	Aplicación	Invariante
1 doble y -1	Un plano	Simetría respecto del plano	Recta y plano perp. al plano de simetría
	$\emptyset$	Simetría + traslación	Plano
-1 triple	1 punto	Simetría central	Subespacios pasan por el centro
-1	1 punto	Simetría respecto de un plano seguida de rotación	Plano

$\boxed{\text{En } \mathbb{R}^n \text{, cualquier movimiento se puede descomponer en simetrías respecto de hiperplanos.}}$

Sabemos que, si $\mathcal{B}$ es ortonormal:

$$\vec{f} \text{ isometría} \iff M_{\mathcal{B}}\vec{f} \text{ es ortogonal}$$

$$\Downarrow$$

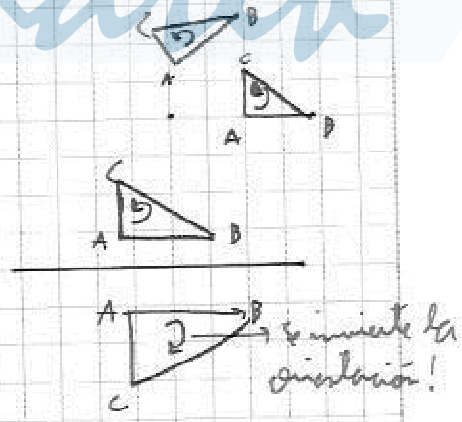
$|M_{\mathcal{B}}\vec{f}| = \pm 1$, lo que nos permite dividir en dos las isometrías

* Isometrías positivas ($|A|=1$): conservan la orientación. $\vec{F}_1 \circ \vec{F}_2$ es tb. positiva (eg $|AB| = |A|\cdot|B|$)

$\Downarrow$

Forman grupo

* Isometrías negativas ($|A|=-1$): invierten la orientación. Pero no forman grupo pq $\vec{F}_1 \circ \vec{F}_2$ es positiva



· En $\mathbb{R}^2$: · Positivas: giros alrededor de un punto.

· Negativas: simetrías respecto de rectas.

Además, unos se pueden obtener respecto de otros:

$$R(\alpha) = S(\beta-\alpha)\cdot S(\beta)$$

$\Downarrow$

Cualquier rotación se puede descomponer como dos simetrías

· En $\mathbb{R}^3$: · Positivas: giros

· Negativas: simetrías respecto de planos

Generalizando esto:

IKASLEEN ERREKTOREORDETZA
VICERRECTORADO DE ALUMNADO

Universidad del País Vasco / Euskal Herriko Unibertsitatea

Teorema de Cartan–Diedonné: cualquier isometría se puede descomponer como simetrías respecto de hiperplanos.

Corolario: cualquier movimiento se puede descomponer como simetrías respecto de hiperplanos.

SEMEJANZAS

Definición: sea $F: A \longrightarrow A$ una aplicación. F se dice semejanza cuando:

$$\boxed{d(F(p), F(q)) = \rho\, d(p,q)} \quad \forall p,q \in A, \quad \rho > 0$$

A ρ, común a todos los puntos, se le llama razón de la semejanza.

Comentarios:

* $\rho = 1 \Rightarrow$ Movimiento
* Las homotecias son semejanzas, y su razón es ρ

Teorema: cualquier semejanza es composición de un movimiento y una homotecia.

Demostración:

Sea F una semejanza de razón ρ y H una homotecia de razón $\frac{1}{\rho}$:

(Asumimos que F es afín)

$$d((F\circ H)(p), (F\circ H)(q)) \underset{\text{def}}{=} \|\overrightarrow{(F\circ H)(p)(F\circ H)(q)}\| = \|\overrightarrow{F\circ H}(\overrightarrow{pq})\| = \|\vec{F}(\tfrac{1}{\rho}\overrightarrow{pq})\| \underset{\vec{F}\text{ lineal}}{=} |\tfrac{1}{\rho}| \cdot \|\vec{F}(\overrightarrow{pq})\| \underset{\rho>0}{=}$$

$$= \frac{1}{\rho} d(F(p), F(q)) = \frac{\rho}{\rho} d(p,q) = d(p,q) \Longrightarrow G_1 = F\circ H \text{ es un movimiento}$$

Análogamente, $G_2 = H\circ F$ es " "

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\begin{array}{l} F = G_1 \circ H^{-1} \\ F = H^{-1} \circ G_2 \end{array}} \quad \text{C.Q.D.}$$

Así, $\vec{F} = \vec{G_1} \circ \rho\, id_V = \rho \vec{G_1}$

<u>Corolario</u>: Sea F una semejanza de razón ρ y movimiento asociado G. Entonces,

$$\vec{F} = \rho \vec{G}$$

Así, $M_{\mathcal{B}_0} \vec{G}$ es ortogonal, por lo que $M_{\mathcal{B}_0} \vec{F} = \rho A$, con A ortogonal

$\Downarrow$

V.p. de $\vec{F}$ son $\pm \rho$

$\Downarrow$

$Ker(\vec{f} - id) = \{0\}$ salvo si $\rho = 1$

<u>Corolario</u>: Si F es una semejanza y no es un movimiento ($\rho \neq 1$) hay un <u>único punto fijo</u> (centro de semejanza).

Último para fijos [illegible] ; la dimensión de los subespacio VA A SER $V(1)$

Movimientos en $\mathbb{R}^2$

· Las isometrías en $\mathbb{R}^2$ están divididas a dos: sea $M_{\mathcal{B}_V}(\vec{F})$ la matriz asociada en $\mathcal{B}_V$ ortonormal. Pues bien, $M_{\mathcal{B}_V}(\vec{F})$ puede ser:

$$R(\alpha)=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha\\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}.\ \text{Valores propios}_{\in\mathbb{R}} \begin{cases} 1 \text{ doble si } \alpha=0\\ -1 \text{ doble si } \alpha=\pi\\ \emptyset \text{ si } \alpha\neq 0,\pi\end{cases}$$

$$S(\alpha)=\begin{pmatrix}\cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha\\ \operatorname{sen}\alpha & -\cos\alpha\end{pmatrix};\ S(0)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}.\ \text{Valores propios} \in\mathbb{R} \rightarrow 1,-1$$

Elegida la base adecuada, queda $R(\alpha)$ o bien $S(0)$: recordemos que

$$S(\alpha)=R\left(\tfrac{\alpha}{2}\right)\cdot S(0)\cdot R\left(-\tfrac{\alpha}{2}\right)$$

· Así, si F es un movimiento:

① $F\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}l_1\\l_2\end{pmatrix}+R(\alpha)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

② $F\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}l_1\\l_2\end{pmatrix}+S(0)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

· Casos:

1a) $\underline{\alpha=0}$ $\quad R(0)=I_2$

F es una traslación

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{* No tiene puntos fijos salvo si } l_1=l_2=0 \text{, en cuyo caso F}\\ \text{es la identidad (todos los puntos fijos)}\\ \text{* Si } (l_1,l_2)\neq(0,0) \text{, entonces las rectas en la dirección}\\ \overrightarrow{l_1 l_2} \text{ son invariantes}\end{array}}$$

1b) $\underline{\alpha \neq 0}$:

Busquemos los ptos invariantes:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$-\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha - 1 & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$\Downarrow$ (la llamo A)

$$|A| = (\cos\alpha - 1)^2 + \operatorname{sen}^2\alpha > 0$$

$$|A| \neq 0$$

$\Downarrow$

S.C.D.

$\Downarrow$

$\exists!$ punto invariante

Si tomamos como origen de coordenadas el punto fijo, la aplicación se escribe:

$$F\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = R(\alpha) \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}$$

$\Downarrow$

<u>Rotación de ángulo α y centro el punto fijo</u>

<u>Caso particular</u>: $\alpha = \pi$: $R(\pi) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ <u>Simetría de centro el punto fijo</u>

2) Busquemos puntos fijos:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = b_1 + x \\ y = b_2 - y \end{cases}$$

Hay dos posibilidades:

HIPERPLANOS

Su ecuación es de la forma $x^1 a_1 + \ldots + x^n a_n = \lambda$

Proposición: sea un espacio afín sobre un espacio vectorial euclídeo con el producto escalar canónico. Sea $H: \sum_{i=1}^{n} x^i a_i = \lambda$ un hiperplano. Entonces:

$$n = (a_1, \ldots, a_n)$$

$$\forall p, q \in H \quad \langle n, \overrightarrow{pq} \rangle = 0$$

Corolario: $\langle n \rangle = \overrightarrow{H}^{\perp}$

Demostración:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Sea } p = (y_1, \ldots, y_n) \\ q = (z_1, \ldots, z_n) \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{pq} = (z_1 - y_1, \ldots, z_n - y_n)$$

Ahora, como $p \in H$: $\sum_{i=1}^{n} y_i a_i = \lambda$

como $q \in H$: $\sum_{i=1}^{n} z_i a_i = \lambda$

Restando: $\sum_{i=1}^{n} (z_i - y_i) a_i = 0$

$$\Updownarrow \text{ El prod. esc. es el canónico}$$

$$\langle \overrightarrow{pq}, n \rangle = 0 \quad \text{C.Q.D.}$$

Corolario: $H = p + \overrightarrow{H}$, $\forall v \in \overrightarrow{H}$, $q = p + v \in H$

$$\Downarrow \text{ Prop.}$$

$$\forall v \in \overrightarrow{H} \quad \langle n, v \rangle = 0$$

$$\Downarrow$$

$$n \in \overrightarrow{H}^{\perp} \Rightarrow \langle n \rangle \overset{\dim 1}{\subseteq} \overset{\dim 1 \text{ (hip.)}}{\overrightarrow{H}^{\perp}} \Rightarrow \langle n \rangle = \overrightarrow{H}^{\perp}$$

Proposición: Sea $H: \sum_{i=1}^{n} x^i a_i + \lambda = 0$ un hiperplano y $p = \begin{pmatrix} p^1 \\ \vdots \\ p^n \end{pmatrix}$ un punto cualquiera de A. Entonces,

$$d(p,H) = \frac{|a_1 p^1 + \dots + a_n p^n + \lambda|}{\sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}}$$

Demostración:

Sea $m = \frac{(a_1, \dots, a_n)}{\sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}} = \frac{(a_1, \dots, a_n)}{\|(a_1, \dots, a_n)\|}$

Sea q la proyección ortogonal de p sobre H.

$$\Downarrow$$

$$\overrightarrow{pq} \in \overrightarrow{H}^{\perp} = \langle m \rangle$$

$$\Downarrow$$

$$\overrightarrow{pq} = k \cdot m \Rightarrow d(p,q) = |k| \cdot \|m\| = |k|$$

Sea $r \in H$, $\langle \overrightarrow{pr}, m \rangle = \langle \overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qr}, m \rangle = \langle km, m \rangle + \underbrace{\langle \overrightarrow{qr}, m \rangle}_{0 \text{ ya } \overset{q \in H}{r \in H}} = k\|m\| = k$

Así, $d(p,H) = d(p,q) = |k| = |\langle \overrightarrow{pr}, m \rangle| = \frac{1}{\|m\|} |\langle \overrightarrow{pr}, (a_1, \dots, a_n) \rangle| =$

$$= \frac{|(r^1 - p^1) a_1 + \dots + (r^n - p^n) a_n|}{\sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}} = \frac{|r^1 a_1 + \dots + r^n a_n - p^1 a_1 - \dots - p^n a_n|}{\sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}} \overset{r \in H}{=}$$

$$= \frac{|-\lambda - p^1 a_1 - \dots - p^n a_n|}{\sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}} = \frac{|a_1 p^1 + \dots + a_n p^n + \lambda|}{\sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}} \text{ C.Q.D.}$$