

MÁXIMOS Y MÍNIMOS

En general:

- Ptos críticos: sea f diferenciable

$$\nabla f(x_0) = 0 \implies x_0 \text{ es punto crítico}$$

- Máximo / mínimo / punto silla: sea $f \in C^3$ y x_0 punto crítico

• $Hf(x_0)$ def. pos. $\implies x_0$ mínimo

• $Hf(x_0)$ def. neg. $\implies x_0$ máximo

• Ninguno de los anteriores pero $|Hf(x_0)| \neq 0$

\Downarrow
 x_0 punto silla

\rightarrow Pq. hay regiones positivas (o en dirección crece) y negativas (o en dirección decrece)

- Si $|Hf(x_0)| = 0$, hay que tirar de la definición:

$$\exists \epsilon > 0 \forall \tau > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in B(x_0, \delta) \cap \tau, f(x) \begin{matrix} \text{mínimo} \\ \text{máximo} \end{matrix} \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} f(x_0)$$

• Ver cuánto vale $f(x_0)$ y si $f(x)$ a general puede valer más / menos

• Acotar

• Buscar en qué zonas es mayor y a cuáles menos (estudiar el signo de $f(x) - f(x_0)$)

• Buscar dirección que crezca y dirección que decrezca

• Estudiar f en 1 variable (p.ej., $f(x, y) = \cos(x^2 + y^2)$)

Restricciones:

→ Aplicar sólo si no puedo dejar de la restricción (con método mónico)

Ptos críticos: $f, g \in C^1$; $\nabla g(x_0) \neq 0$

sea $S = \{x/g(x)=0\}$

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ t.q. } \nabla f(x_0) = \lambda \nabla g(x_0)$$



x_0 es punto crítico de $f|_S$

(Si hay más de una restricción, $\nabla f = \lambda \nabla g + \mu \nabla h$)

Máximos/mínimos:

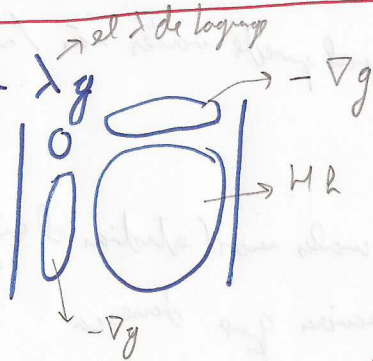
Hay un teorema utilísimo que reduce todo a comparar pto. críticos obtenidos vía Lagrange:

f continua $\Rightarrow f|_S$ tiene máximos y mínimos
S cerrado y acotado
↳ interior $\subseteq S$ ↳ sobre la frontera

O si no:

Sea $h \equiv f - \lambda g$

Sea $H \equiv$



$\Delta_i H < 0 \quad \forall i \geq 3 \Rightarrow$ mínimo

$(-1)^{i+1} \Delta_i H > 0 \quad \forall i \geq 3 \Rightarrow$ Máximo
↳ 0, de 3 > 0 y el resto alterna el signo

Y si todo falla:

$\Delta_i H \neq 0 \quad \forall i \geq 3 \Rightarrow$ Punto silla

- Recuerda, si nos dan un conjunto convexo y acotado:

- Obtener los pto. criticos del interior via $\nabla f = 0$
- Obtener los puntos criticos de la frontera (ahi f no es diferenciable) via despejando /

Lagrange

- Comparar

- Si estamos muy desesperados, a veces con un cambio de variable (t-y: a polares) la restricción se vuelve despejable.

- Solve todo en Lagrange, MUCHO OJO con:

• Dividir entre 0 $\lambda x = 2x; \begin{cases} x=0 \\ \lambda=2 \end{cases}$

• Tomar raíces (hay 2) $\lambda^2 = 9; \lambda = \pm 3$

Zimatek

FUNCIÓN IMPLÍCITA

- Tra. particular: sea $F(x_1, \dots, x_n, z)$

$$\text{Hipótesis } \begin{cases} F \in C^1 \\ F(x_0, z_0, \dots, x_n, z_0) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, z_0) \neq 0 \end{cases}$$

- $\exists U \subseteq \mathbb{R}^n$, bola que contiene a \vec{x}_0

- $\exists V \subseteq \mathbb{R}$, intervalo que contiene a z_0

$\exists!$ $g: U \rightarrow V$ que cumple
 $\vec{x} \rightarrow g(\vec{x}) = z$

• $\forall \vec{x} \in U, F(\vec{x}, g(\vec{x})) = 0 \rightarrow$ He descripto z en función de \vec{x}

• $\forall \vec{x} \in U, \forall z \in V \text{ t.q. } F(\vec{x}, z) = 0;$
 $z = g(\vec{x})$
 \rightarrow He obtenido todas las soluciones que están en el conjunto $U \times V$

• $g \in C^1$ y $\frac{\partial g}{\partial x_k}(\vec{x})$ se obtiene imponiendo

$\frac{\partial F}{\partial x_k} = 0$ y teniendo en cuenta que $z = z(x_k)$

- Versión para adultos: sea el sistema

$$S \begin{cases} F_1(x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_m) = 0 \\ \vdots \\ F_m(x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_m) = 0 \end{cases}$$

Hipótesis

$$\begin{cases} F_i \in C^1 \forall i \\ F_i(\vec{x}_0, \vec{z}_0) = 0 \forall i \\ \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial z_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial z_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial z_1} & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial z_m} \end{vmatrix} (\vec{x}_0, \vec{z}_0) \neq 0 \end{cases} \rightarrow \text{condición no trivial de rango}$$

- $\exists U \subseteq \mathbb{R}^n$ bola que contiene a \vec{x}_0

$\exists V \subseteq \mathbb{R}^m$ bola que contiene a \vec{z}_0

$\exists!$ $H: U \longrightarrow V$ que cumple
 $\vec{x} \longmapsto (h_1(\vec{x}), \dots, h_m(\vec{x})) = \vec{z}$

• $\forall \vec{x} \in U, (\vec{x}, H(\vec{x}))$ es solución de $S \rightarrow$ He despejado z_i a favor de x_i

• $\forall \vec{x} \in U, \forall \vec{z} \in V$ tq (\vec{x}, \vec{z}) es solución de S
 $\vec{z} = H(\vec{x})$
 \rightarrow He obtenido todas las soluciones de S

• $\frac{\partial h_i}{\partial x_k}$ se obtiene aplicando que $\frac{\partial F_i}{\partial x_k} = 0 \forall i$ (teniendo a cuenta

que z_j es función de $x_k \forall j$) y resolviendo el sistema lineal que queda.

- Teorema de la función inversa: sea

$$F: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$(x_1, \dots, x_n) \longrightarrow (f_1(x), \dots, f_n(x))$$

con $\vec{y}_0 = F(\vec{x}_0)$

Hipótesis $\left\{ \begin{array}{l} F \text{ es } C^1 \\ |J F(\vec{x}_0)| \neq 0 \end{array} \right.$

$$|J F(\vec{x}_0)| = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} \neq 0$$

$\exists U \subset \mathbb{R}^n$, bola que contiene a \vec{x}_0

$\exists V \subset \mathbb{R}^n$, bola que contiene a \vec{y}_0

tg $\vec{y} = F(\vec{x})$ se puede invertir de manera única $\forall \vec{x} \in U$
 $\forall \vec{y} \in V$

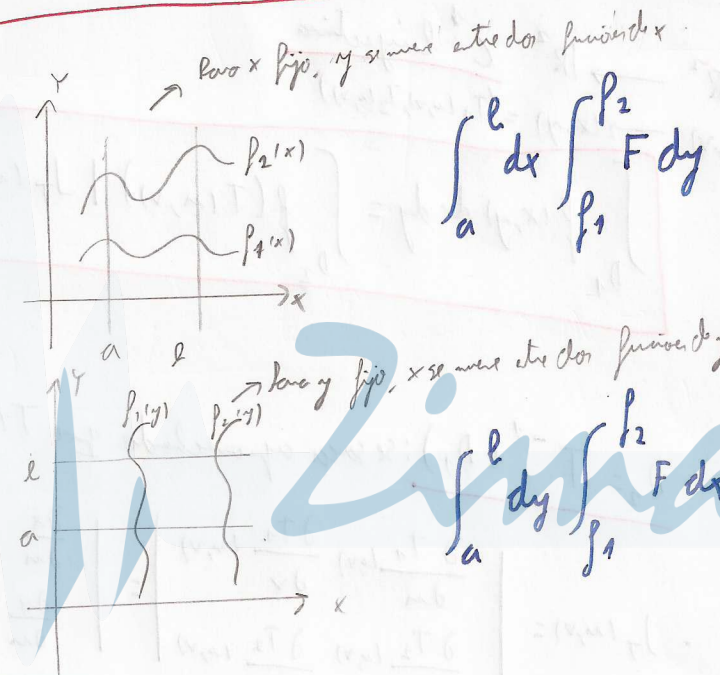
INTEGRALES MÚLTIPLES

- El único teorema que nos interesa:

f acotada y cuyas discontinuidades forman una unión finita de gráficos de funciones
continuas
 \Downarrow
 f integrable

- Derivación:

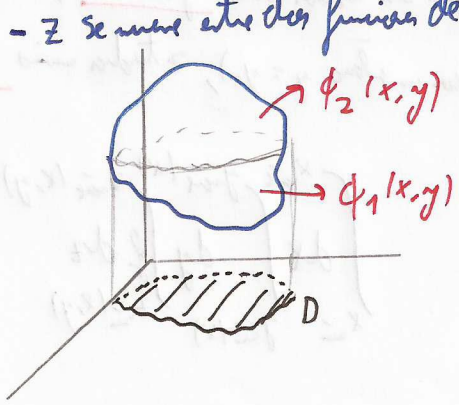
• \mathbb{R}^2 : es fácil



dominio más fácil se descompone:

• \mathbb{R}^3 : hay 3 posibilidades (evidente, todo se puede hacer con otra coordenada)

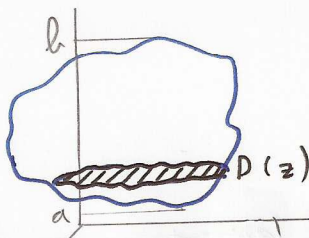
- 1.- - Proyecto sobre el plano $xy \rightarrow$ se queda un dominio de \mathbb{R}^2 D
- z se mueve entre dos funciones de x e y



$$\int_D dx dy \int_{\phi_1}^{\phi_2} f dz$$

2º: (Útil porque en figuras un poco torcidas o curvadas se ve mejor)
 - Canto con un plano \perp al eje $Oz \Rightarrow$ Me queda un dominio plano que obviamente depende de $z \Rightarrow D = D(z)$

- z se maneja sus valores mínimos y máx.



$$\int_a^b dz \int_D f dx dy$$

*

- Cambio de variable

sea $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ C^1 biyectiva
 $(u, v) \rightarrow (x, y) = (T_1(u, v), T_2(u, v))$

$$\int_{D_1} f(x, y) dx dy = \int_{D_2} f(T(u, v)) |J_T(u, v)| du dv$$

↑
valor absoluto

con:

• $D_2 = T^{-1}(D_1)$: se saca apurachado que $T(\text{frontera}) = \text{frontera y pitado}$

• $J_T(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial T_1}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial T_1}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial T_2}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial T_2}{\partial v}(u, v) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$: las derivadas

se hacen de tal forma que todo quede a los nuevos variables.

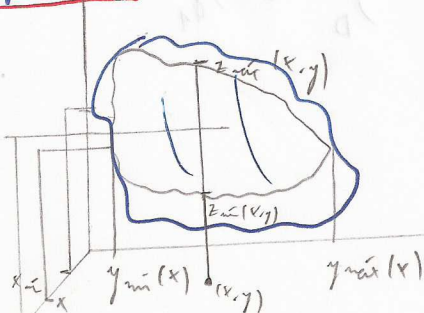
(Lo mismo en \mathbb{R}^3)

* 3º: (Es el procedimiento más general, muy útil si se trabaja en \langle ^{álgebra} ~~álgebra~~ $\rangle \Rightarrow$ En realidad es el 1º apartado de forma abstracta)

- En la figura, x tendrá un valor mínimo, x_{\min} y un valor máximo, x_{\max}

- Si fijo x (canto con un plano $x = x_0$), y tendrá un valor mínimo $y_{\min}(x)$ y un valor máximo $y_{\max}(x)$

- Si fijo x e y (canto con un plano $x = x_0$ y con un plano $y = y_0$), z tendrá mínimo $z_{\min}(x, y)$ y máximo $z_{\max}(x, y)$

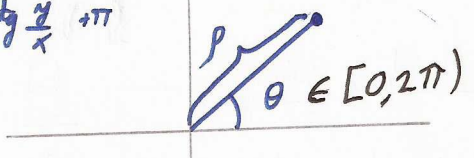


$$\int_{x_{\min}}^{x_{\max}} dx \int_{y_{\min}(x)}^{y_{\max}(x)} dy \int_{z_{\min}(x, y)}^{z_{\max}(x, y)} f dz$$

- Cambio útil cuando hay simetría:

\mathbb{R}^2 :
$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctan \frac{y}{x} + \pi \end{cases}$$

$|J| = \rho$

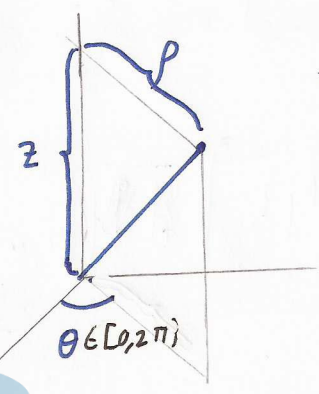


\Rightarrow Hay que saber hacer
integrales trigonométricas

\mathbb{R}^3 : Cilindricas: (sal de \mathbb{R}^2 elevando a \mathbb{R}^3)

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \\ z = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctan \frac{y}{x} + \pi \\ z = z \end{cases}$$

$|J| = \rho$



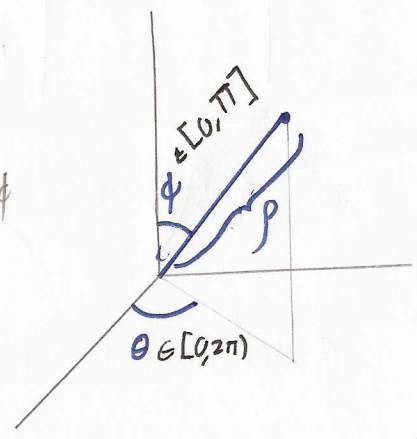
Zimatek

Esféricas:

$$\begin{cases} x = \rho \sin \phi \cos \theta \\ y = \rho \sin \phi \sin \theta \\ z = \rho \cos \phi \end{cases}$$

Con a polars, solo que ahora la longitud de la proyección es $\rho \sin \phi$

$|J| = \rho^2 \sin \phi$



- En general, aprovecharse de simetrías para reducir el dominio (si es simétrica, $\int_0 = 4 \int_{\Delta}$) además de que te ahorras bien con signos.

- Para rectángulos torcidos se pueden hacer cambios de base

- Para integrales difíciles (que sólo dependan de 1 variable), se puede intentar cambiar el dominio de integración.

INTEGRALES SOBRE TRAYECTORIAS

Y SUPERFICIES

Lo que lo sea un espacio n-d

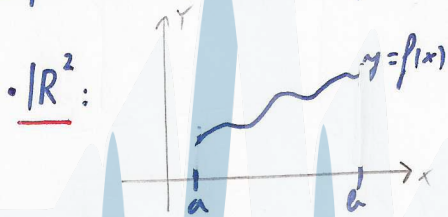
- Trayectorias: sea $\sigma(t): [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ la parametrización de la curva \mathcal{C} . σ debe ser C^1 biyectiva.

$$\int_{\mathcal{C}} f ds = \int_a^b f(\sigma(t)) \|\sigma'(t)\| dt$$

$$\int_{\sigma} F \cdot ds = \int_a^b F(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t) dt$$

→ Si quieres ir en sentido contrario, cambia los límites: a se detiene por $-t$ y el intervalo es $[-b, -a]$

• ¿Cómo se parametriza una trayectoria? ⇒ Pon todas las variables a función de una



$$\sigma(t) \equiv \begin{cases} x=t \\ y=f(t) \end{cases} \quad t \in [a, b]$$

- A veces la relación entre una coordenada y otra es más fácil en polares: $\rho = \rho(\theta)$ con $\theta \in [a, b]$. En ese caso, $\sigma(t) \equiv \begin{cases} x = \rho(t) \cos t \\ y = \rho(t) \sin t \end{cases}$

- Puede ser interesante separarlo a tres en que sabemos parametrizar

• \mathbb{R}^3 : Si nos la dan de forma implícita: $\begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases}$ - dejamos dos variables (digamos x e y) a función

de la 3ª: $\sigma(t) \equiv \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = t \end{cases} \quad t \in [z_{\min}, z_{\max}]$

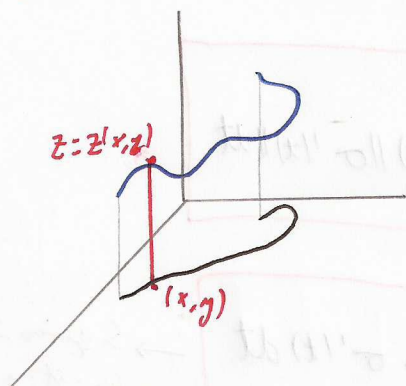
• Muchas veces en polares la relación entre coordenadas es mucho más fácil. Recuerda que:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \\ z = z \end{cases} \quad \begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \\ z = z \end{cases}$$

↙ esférica ↘ cilíndrica

• Otra forma quizás más intuitiva es proyectar la trayectoria sobre el plano XY . Nos queda una trayectoria en \mathbb{R}^2 que parametrizamos. Después, para cada (x, y) , z se levanta hasta una

altura $z = f(x, y) = f(t)$:



Es útil cuando conocemos una superficie a la que se apoya la curva



Zimatek

- Superficie: sea $\phi: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la parametrización de la superficie S . ϕ debe ser

$$(u, v) \rightarrow \phi(u, v)$$

C^1 biyectiva a trozos. lo que lo sea una superficie

$$\int_S f dS = \int_D f \|(T_u \times T_v)\| du dv$$

$$\text{con } T_u = \frac{\partial \phi}{\partial u}$$

$$T_v = \frac{\partial \phi}{\partial v}$$

$$\int_S F \cdot dS = \int_D F \cdot (T_u \times T_v) du dv$$

→ si quieres la otra orientación $T_u \times T_v$

• ¿Cómo se parametriza una superficie? ⇒ Pon todas las variables a función de dos

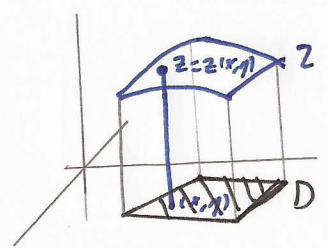
- Si nos dan $z = f(x, y)$ lo tengo a mano: $\phi: \begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = f(x, y) \end{cases}$; Des la proyección de S

sobre el plano XY . Nota que esto es útil si tengo superficie infinita de las que corto un trozo.

- Muchas veces la relación entre las coordenadas es más fácil a polares (a veces una es libre y otra depende de la otra). P.ej., es útil si corto un trozo de esfera o cilíndrico.

Aquí para casos D :
 • Una variable tendrá un valor mínimo y un valor máximo
 • Fijo esa variable. Para esa variable fija, la otra tendrá un valor mínimo (que dependerá de la 1ª var.) y un valor máximo

- Intuitivamente: proyecta sobre el plano XY y parametriza la proyección;
 para cada (x, y) de la proyección levanto $z = z(x, y)$.



TEOREMAS

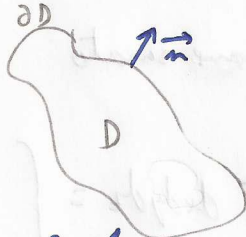
Regla mnemotécnica: las div./rot. se toman a el lado de más dimensión

Green: sea $D \subset \mathbb{R}^2$, de frontera ∂D y sentido arbitrario. Sean P y Q funciones C^1 .

$$\int_{\partial D} (P, Q) \cdot ds = \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

Divergencia a el plano: sea $D \subset \mathbb{R}^2$, de frontera ∂D con \vec{n} el vector unitario normal exterior

a ∂D :



Sea $\vec{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ C^1 :

$$\int_{\partial D} \underbrace{\vec{F} \cdot \vec{n}}_{\text{Emersión}} ds = \int_D \text{div } \vec{F} dx dy$$

Para obtener \vec{n} , si ∂D está parametrizado por $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$

$$\vec{n} = \frac{(y'(t), -x'(t))}{\sqrt{y'^2(t) + x'^2(t)}} \rightarrow \text{Es el vector } \perp \text{ a } \sigma'(t)$$

(Este truco también vale para curvas más generales)



Stokes: sea una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ de frontera ∂S (curva)

sea $F: S \rightarrow \mathbb{R}^3 \subset \mathbb{R}^1$

$$\int_S \text{rot } F \cdot dS = \int_{\partial S} F \cdot ds$$

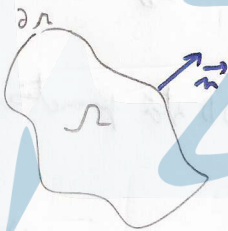
Las orientaciones de S y ∂S van ligadas por la regla de la mano derecha

Gauss: sea un volumen $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ de frontera $\partial \Omega$ (superficie)

sea $F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ un vector

$$\int_{\Omega} \text{div } F \, dx \, dy \, dz = \int_{\partial \Omega} F \cdot \vec{n} \, dS$$

con \vec{n} el vector unitario normal exterior a $\partial \Omega$:

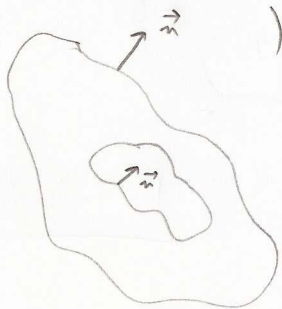


Si $\partial \Omega$ se parametriza por $\phi(u, v)$, \vec{n} es:

$$\vec{n} = \frac{\pm (T_u \times T_v)}{\|T_u \times T_v\|}$$

se coge el exterior

(El \pm vale para curvas feas:



Si la superficie no es cavada, se cierra y luego se le resta a la integral los integrales de las superficies que luego añadido.

Casos conservativos: sea $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ C^1 salvo a un n.º finito de puntos. Son equivalentes:

i) \forall curva cerrada $\gamma \subset \mathbb{R}^3$:

$$\int_{\gamma} F \cdot ds = 0$$

ii) $\forall \gamma_1$ y γ_2 curvas orientadas con los mismos extremos:

$$\int_{\gamma_1} F \cdot ds = \int_{\gamma_2} F \cdot ds$$

iii) $\exists f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ \rightarrow se busca f $F = \nabla f$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = F_x \Rightarrow f = \int F_x dx + g(y, z) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = F_y \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y} \left[\int F_x dx \right] + \frac{\partial g}{\partial y} = F_y \Rightarrow \text{se van los } x, y \text{ se obtiene } g \\ \frac{\partial f}{\partial z} = F_z \Rightarrow \text{se fija la función de } z \rightarrow \text{y con eso se va } g \end{cases}$$

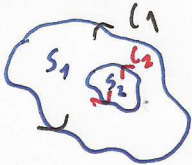
iv) $\text{rot } F = 0$

Teorema útil: sea $F = \nabla f$

$$\int_{\sigma} F \cdot ds = \int_a^b F(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t) dt = f(\sigma(b)) - f(\sigma(a))$$

Entonces, antes de hacer integrales de línea para, comprobar si hay sentido y $F = \nabla f \Leftrightarrow \nabla \times F = 0$

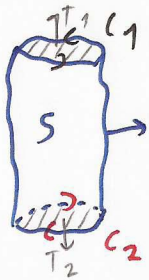
¿Cómo aplicamos Stokes a superficies con agujeros?



$$\int_{S_1} \text{rot } F \cdot dS = \int_{S_1 \cup S_2} \text{rot } F \cdot dS - \int_{S_2} \text{rot } F \cdot dS =$$

$$= \int_{C_1} F \cdot ds - \int_{C_2} F \cdot ds \Rightarrow \text{las orientaciones están ahora claras}$$

¿Ya superficies con dos fronteras?



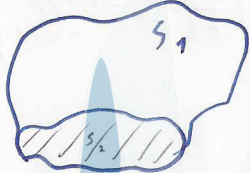
$$\int_S \text{rot } F \cdot dS = \int_{S \cup T_1 \cup T_2} \text{rot } F \cdot dS = \int_{T_1} \text{rot } F \cdot dS - \int_{T_2} \text{rot } F \cdot dS =$$

$$= \int_{\text{Volumen}} \underbrace{\text{div}(\text{rot } F)}_{=0!!} dx dy dz - \int_{T_1} \text{rot } F \cdot dS - \int_{T_2} \text{rot } F \cdot dS =$$

↓
Teorema de Gauss

$$= - \left[\int_{C_1} F \cdot dS + \int_{C_2} F \cdot dS \right], \text{ donde las orientaciones están ya dadas}$$

De hecho, este truco vale para superficies más difíciles:



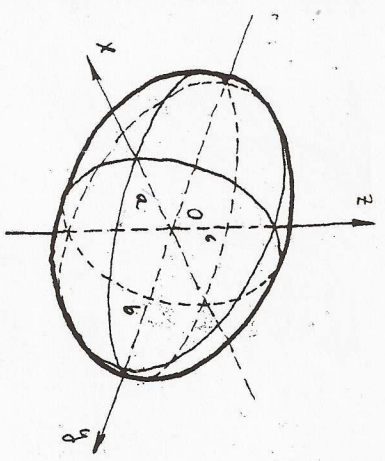
$$\int_{S_1} \text{rot } F \cdot dS = \int_{C_2} \text{rot } F \cdot dS, \text{ y la 2ª integral}$$

es infinitamente más sencilla

Zimatek

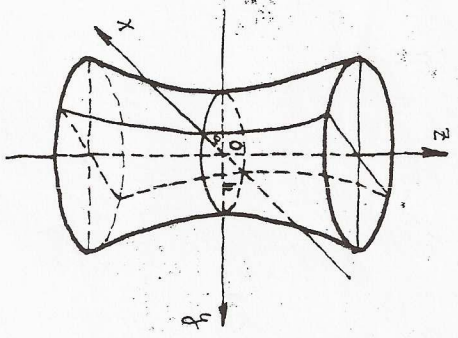
CVÁDRICAS (Conicas 2d espaciais)

ELIPSOIDE



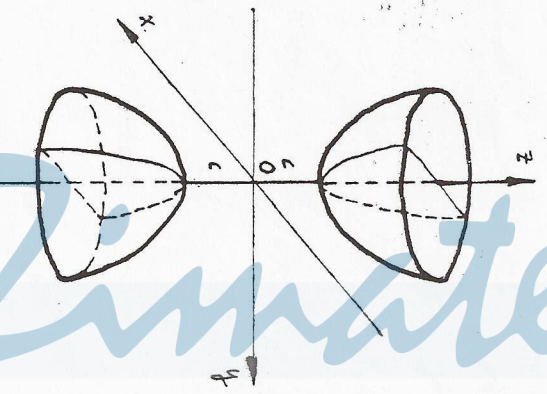
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

HIPERBOLOIDE DE UMA HOJA



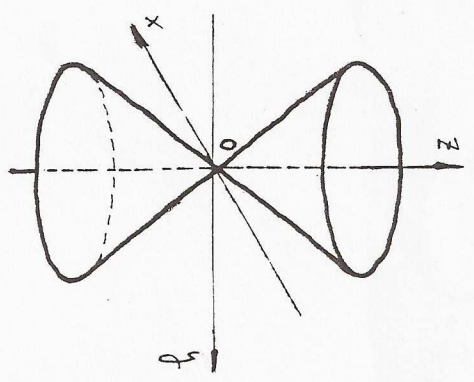
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

HIPERBOLOIDE DE DOS HOJAS



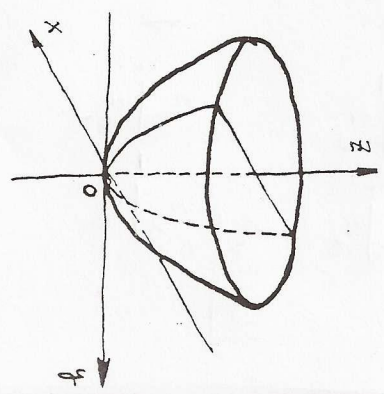
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

CONO



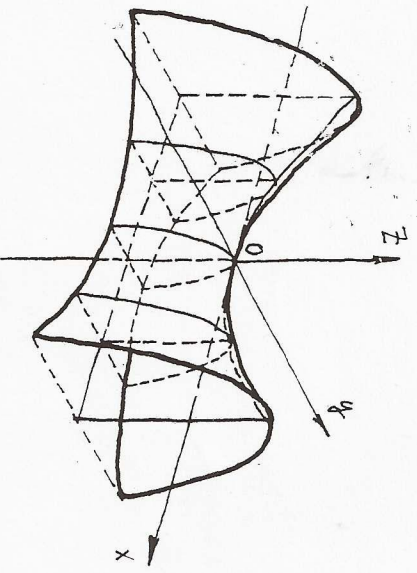
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z^2$$

PARABOLOIDE ELÍPTICO



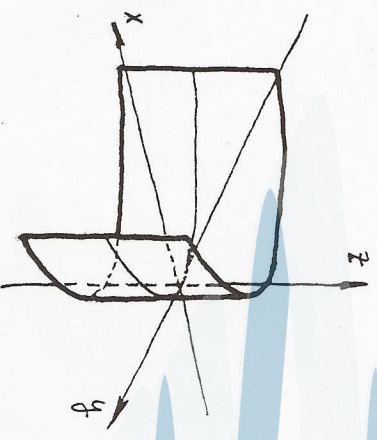
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z$$

PARABOLOIDE HIPERBÓLICO



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z$$

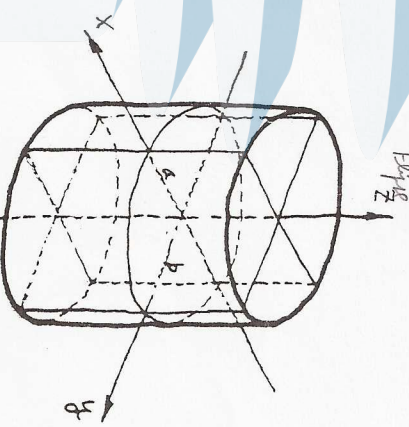
CILINDRO PARABÓLICO



$$y^2 = 2px$$

Parábola

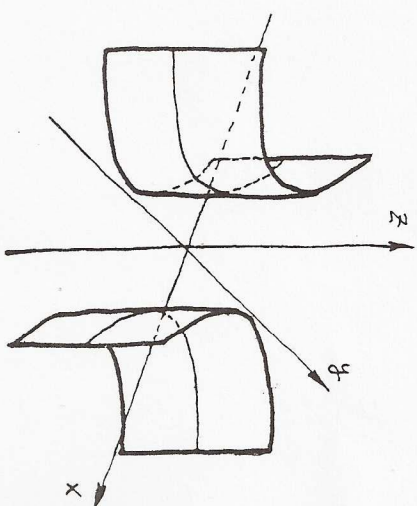
CILINDRO ELÍPTICO



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Elipse

CILINDRO HIPERBÓLICO



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Hiperbola