$\mathbb{C}$: INTRODUCCIÓN Y OPERACIONES

· $\mathbb{C}$ es $\mathbb{R}^2$ introduciendo un producto:

$$(a,b)\cdot(c,d) = (ac-bd,\ ad+bc)$$

Con esto adquiere, como $\mathbb{R}$, estructura de cuerpo.

· Se suele denotar $i \equiv (0,1)$. Así, se trabaja como con números reales ($\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$). Como $i^2 = -1$, esto nos va a permitir resolver ecuaciones polinómicas.

el producto de $\mathbb{C}$ se reduce al de $\mathbb{R}$ si $\mathrm{Im}[z]=0$

· Vamos a definir algunas operaciones. Sea $z = a+bi$

· $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$. Propiedades:

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$$

Si $z \in \mathbb{R}$, $|z| = \mathrm{abs}(z)$

· $\arg(z) = \mathrm{atan2}(x,y) = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\left(\overset{2^{\circ}\text{ cuadrante}}{+}\underset{3^{\text{er}}\text{ cuadrante}}{-}\pi\right)$. Propiedades:

Dependiendo de dónde contemos los ángulos, habrá una discontinuidad.

· Multiplicar complejos es multiplicar módulos (estirar) y sumar argumentos (rotar).

· $\bar{z} = a - bi$. Propiedades:

$$z\bar{z} = |z|^2$$

$$|z| = |\bar{z}|$$

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

$$z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$$

$$\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1\,\bar{z}_2$$

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

· Propiedades de polinomios:

· Si los coeficientes son reales, los raíces son conjugadas.

· Las raíces n-ésimas de la unidad forman un n-ágono regular

· Las raíces n-ésimas de -1 son las raíces $2n$-ésimas de 1 que no son raíces n-ésimas de 1

FÓRMULA DE EULER, $\ln$ Y RAÍCES

· Sea $e^z \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$. Entonces:

$$\boxed{e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi \quad \forall \varphi \in \mathbb{R}}$$

$(_{\gamma \in \mathbb{C}}) \Rightarrow$ La exponencial tiene periodo $2\pi i$

Así:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$ $(\Rightarrow \cos ix = \cosh x)$

$$\operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$ $(\Rightarrow \operatorname{sen} ix = i \operatorname{senh} x)$

$$\boxed{z = |z| e^{i \arg(z)} \quad \forall z \in \mathbb{C}}$$

· Así, es fácil tomar raíces:

$$w = \sqrt[n]{z}$$
$$\Updownarrow$$
$$w^n = z \Leftrightarrow |w|^n e^{i n \arg(w)} = |z| e^{i \arg z}$$
$$\Updownarrow$$
$$|w| = \sqrt[n]{|z|}$$
$$n \arg(w) = \arg z + 2k\pi \Leftrightarrow \arg(w) = \frac{\arg(z)}{n} + \frac{2k\pi}{n}$$

Es decir:

$\sqrt[n]{z}$ tiene:
- Módulo $\sqrt[n]{|z|}$
- Argumento $\dfrac{\arg z}{n} + \dfrac{2k\pi}{n}$

- Y el ln:

$$\boxed{\ln z = \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi)}$$

- Ambas funciones tienen varios problemas:
  - <u>No están unívocamente definidas</u> (el ln tiene ∞ ramas y la raíz n)

    $\Downarrow$

    Se suele tomar la rama principal ($k=0$)
  - En $z=0$ lo pasan mal $\Rightarrow$ <u>evitar</u> ese punto
  - <u>Son discontinuas</u> allí donde peguemos el hachazo al argumento

FUNCIONES DIFERENCIABLES

· Son funciones que localmente se parecen a una función $\mathbb{C}$ lineal $\Leftrightarrow$ rotar y estirar.

Lema:

$$f : \mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{C}$$

$$f \ \mathbb{C}\text{-lineal} \Longrightarrow f \ \mathbb{R}\text{-lineal}$$

$$f(z) = c \cdot z \qquad\qquad f(x+iy) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$f \ \mathbb{R}\text{-lineal es } \mathbb{C}\text{-lineal} \Longleftrightarrow M(f) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

En este caso, el número complejo por el que se multiplica es (a, b)

· La definición es:

$$\boxed{f'(c) = \lim_{z \to c} \frac{f(z) - f(c)}{z - c}}$$

Las propiedades son iguales que en $\mathbb{R}$

· Sea $f = u + iv$. Exigiendo, para que haya límite doble, que los límites direccionales sean iguales se llega a las ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$\boxed{\begin{aligned} u_x &= v_y \\ -u_y &= v_x \end{aligned}}$$

Como $f' = u_x + i v_x$, es pedir $\mathbb{C}$-linealidad al jacobiano.

· Vamos a un teorema útil:

Teorema: f $\mathbb{C}$-diferenciable $\Longrightarrow$ Se satisface Cauchy-Riemann

Se satisface Cauchy-Riemann y u_x, v_x, u_y, v_y son continuas

$$\Downarrow$$

f $\mathbb{C}$-diferenciable

· Por último:

Armonicidad: las partes real e imaginaria de una función diferenciable son armónicas.

Es más, dada una función armónica, es parte real/imaginaria de una función diferenciable. La otra parte (armónica conjugada) se saca imponiendo Cauchy-Riemann.

Trucos:

1. Sacar la conjugada es, formalmente, como hallar una función dado su gradiente
2. Para, a partir de $f(x+iy)$, sacar $f(z)$; se halla $f(x+i\cdot 0)=f(x)$ $\forall x\in\mathbb{C}$ aunque hallamos sustituido para $x\in\mathbb{R}$.

· Una última definición:

f se dice analítica en D cuando $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$ $\forall z\in D$

INTEGRALES DE LÍNEA COMPLEJAS

(en TODOS los teoremas se pide, al menos, que f sea continua)

Definición: sea $D \subseteq \mathbb{C}$, con: $f: D \longrightarrow \mathbb{C}$

$\gamma : [a,b] \longrightarrow D$ → Curva parametrizada

$$\int_\gamma f(z)\,dz \equiv \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt$$

Regla mnemotécnica:

$$\int_\gamma f(z)dz = \left| \begin{matrix} z = \gamma(t) \\ dz = \gamma'(t)dt \end{matrix} \right| = \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)dt$$

· las partes real e imaginaria no son más que integrales de línea reales de los campos $(u,-v)$ y (v,u).

· Cotas: $\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \leq \int_\gamma |f(z)|\,ds$ (no vale de mucho)

Dice lo mismo

ML: $$\boxed{\begin{matrix} f \text{ continua} \\ |f(z)| \leq M \text{ sobre } \gamma \\ \gamma \text{ de longitud } L \end{matrix} \Longrightarrow \left|\int_\gamma f(z)dz\right| \leq ML}$$ → Se obtiene trivialmente aplicando la 1ª cota y que $|f(z)| \leq M$

→Recordemos de $\mathbb{R}$: $\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|dt$

· TFC:

Sean: $f: D \longrightarrow \mathbb{C}$ continua $\qquad \gamma: [a,b] \longrightarrow D$; con $\gamma(a) = z_0$, $\gamma(b) = z_1$

$F: D \longrightarrow \mathbb{C}$ diferenciable

tq. $F'(z) = f(z) \ \forall z \in D$

entonces:

$$\boxed{\int_\gamma f(z)\,dz = F(z_1) - F(z_0)}$$

(Se demuestra poniendo la integral en función de las partes real e imaginaria de F. Aplicando C-R, quedan integrales de gradientes)

· Es decir:

f continua con primitiva global $\Longrightarrow$ Independencia de caminos $\Updownarrow$ $\oint = 0$

· ¿Cómo hallamos la primitiva si f no es serie de potencias?

Sean: · $z_0 \in D$ simplemente conexo (no tiene agujeros)

· f diferenciable. Basta con pedir independencia de caminos y continuidad

Entonces: · $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(w)\,dw$ cumple $F'(z) = f(z) \ \forall z \in D$

Para esto hace falta ind. de caminos que prueba el siguiente teorema

Se toma de camino la recta entre z_0 y z (si se sale del dominio, se separa vía poligonales, la diferencia es una cte.). Se escribe $F'(z)$ como límite. Se juntan ambas integrales. Se pone $f(w) = f(z_1) + f(w) - f(z_1)$ (luego vamos a el límite). Así, queda por una parte $f(z)$ y por otra parte una integral que se acota vía ML, con $L \to 0$ si $z_1 \to z$.

· Limitémonos ahora a curvas cerradas:

Teorema integral de Cauchy: Sean: · $f: \underline{D} \to \mathbb{C}$ diferenciable → se porta bien en el interior

· $\gamma: [a,b] \to D$ curva cerrada

entonces:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0$$

Se divide Int $[\gamma]$ en trozos simples. Se aplica a cada uno de ellos el tma. de Green. Por C-R, las integrales son todas nulas

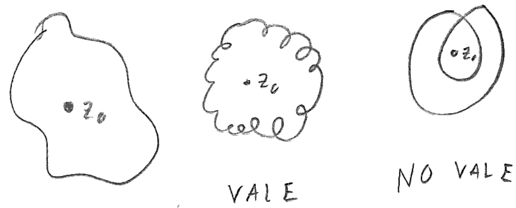
· Como consecuencia: Si yo puedo convertir un camino en otro (de forma continua) sin que f deje de ser diferenciable, habrá independencia de caminos.

· Vamos a ver qué pasa si el integrando es feo:

Fórmulas integrales de Cauchy: Sean: · D simplemente conexo

· $f: D \to \mathbb{C}$ diferenciable

· $\gamma \subset D$ homótopa a una curva cerrada simple (no se autointersecta) positivamente orientada



VALE NO VALE

· z_0 cumple:

$z_0 \in D$

$z_0 \notin \gamma$

γ encierra a z_0

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz = \frac{f^{n)}(z_0)}{n!}$$

$n=0$: Se toma γ círculo centrado en z_0, se pone $f(z) = \underbrace{f(z_0)}_{\text{Da la fórmula}} + \underbrace{f(z) - f(z_0)}_{\text{Se acota vía ML y va a 0}}$

$n \neq 0$. Hace falta el siguiente teorema

PROPIEDADES DE FUNCIONES ANALÍTICAS

- $\boxed{f \text{ diferenciable en un punto y su entorno} \Longrightarrow f \text{ analítica}}$

Se escribe f con la fórmula integral de Cauchy; se desarrolla la serie geométrica (en torno del punto z_0), que conmuta con la integral, y f queda expresada como serie de potencias. Los coeficientes nos dan el resto de fórmulas integrales

- Se puede pedir aún menos:

Teorema de Morera: sean:
- D simplemente conexo
- $f: D \to \mathbb{C}$ continua tq hay independencia de caminos para, al menos, triángulos

entonces:

f es analítica

Es fácil de demostrar: se toma la primitiva antes definida $\left(\int_{z_0}^{z} f(w)\,dw\right)$ y se prueba que es primitiva tomando la definición de derivada con exactamente el mismo truco que el teorema anterior. Como se hace:  , hay que pedir independencia de triángulos

Así, F diferenciable $\Longrightarrow$ F analítica $\Longrightarrow$ f analítica

- Dos propiedades muy útiles que no sabemos para qué sirven:

- Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones analíticas que converge uniformemente a f

$$\Downarrow$$

f es analítica

(se aplica Morera a f poniéndola como un límite, que conmuta con la integral por convergencia uniforme)

- Desigualdades de Cauchy: sea D un disco (de radio R) con $|f| \leq M$ en su frontera:

$$\left|f^{n)}(z_0)\right| \leq \frac{M\,n!}{R^n}$$ (se aplica ML a las fórmulas integrales de Cauchy)

· Dos propiedades mágicas:

Teorema de Liouville: sea $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analítica y acotada en todo $\mathbb{C}$

$$\Downarrow$$

f es constante

Entonces las desigualdades anteriores con: $n=1$, $\rho \to +\infty$

Más generalmente:

Teorema: · Sea $D \subset \mathbb{C}$ sin trozos separados (puede tener agujeros)

· Sea $f: D \to \mathbb{C}$ analítica

· Sea Z el conjunto de ceros de f: $Z = \{ z \in D \,/\, f(z) = 0 \}$

· Si Z contiene una sucesión convergente con todos sus términos distintos y $z_0 = \lim_{n \to +\infty} z_n \in D$, entonces:

$$\forall z \in D, \boxed{f(z) = 0}$$

Se expande f en serie de potencias alrededor de $z_0 = \left[\sum_{n=n_0}^{\infty} \underbrace{a_n}_{\text{1er término no nulo}} (z-z_0)^{n-n_0} \right] \cdot (z-z_0)^{n_0}$. Lo de dentro del corchete es una función que no vale 0 en z_0 (pq. $a_{n_0} \neq 0$). Ahora, $\forall n$, vale 0 en $z_n \Longrightarrow$ Vale 0 en $z_0 \Longrightarrow$ Absurdo

· Como consecuencias utilísimas:

· Los ceros de las funciones analíticas son aislados

· Si dos funciones analíticas coinciden en un dominio que contiene sucesiones convergentes (como $\mathbb{R}$), son iguales.

· __Discontinuidades__: Sea f analítica con una discontinuidad aislada en z_0 (es decir, $\exists R$ tq f es analítica en $0<|z-z_0|<R$). Entonces:

Se construye $g(z)=\begin{cases}(z-z_0)^2 f(z) & \text{si } z\neq z_0\\ 0 & \text{si } z=z_0\end{cases}$

· Analítica (derivable en z_0 porque ahí la derivada es $\lim \underbrace{(z-z_0)}_{0}\underbrace{f(z)}_{\text{Acotada}}$)

· Su serie de potencias empieza en 2, y reduciendo el grado en 2 sale una serie que es $\bar{f}$

· f acotada cerca de z_0 $\Longrightarrow$ $\bar{f}=\begin{cases}f(z) & \text{si } z\neq z_0\\ \lim\limits_{z\to z_0} f(z) & \text{si } z=z_0\end{cases}$ es analítica

(Discontinuidad evitable)

(Las discontinuidades evitables son evitables de verdad)

· f no acotada cerca de z_0:

· $\dfrac{1}{f(z)}$ es analítica porque f se anula a un nº finito de puntos

· Es más, $\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{1}{f(z)}=0$

$\Downarrow$

Tengo una singularidad evitable

$\dfrac{1}{f}=\sum a_n(z-z_0)^n \overset{a_0=0}{=}$ $\underset{n=n_0}{=}$ $\neq 0$ en z_0

$=(z-z_0)^{n_0}\sum_{n_0} a_n(z-z_0)$, e

invirtiendo se llega a lo deseado

$\longleftarrow$ · $\lim\limits_{z\to z_0}|f(z)|=+\infty \Longrightarrow f(z)=\dfrac{g(z)}{(z-z_0)^n}$, con $g(z)$ analítica en z_0, $g(z_0)\neq 0$

Polo

· $\nexists \lim\limits_{z\to z_0}|f(z)|$

Sing. esencial

SERIES DE POTENCIAS

- Sea $f: D \to \mathbb{C}$ analítica. Nos gustaría extender esa función a todo $\mathbb{C}$ (la extensión será única)

Entonces, el radio de convergencia será la distancia entre el centro y el punto más cercano en el cual f no es continua: <u>las series de Taylor convergen hasta donde pueden.</u>

El truco es fácil: la serie de potencias se saca con la fórmula integral de Cauchy, que será válida siempre que f sea continua

SERIE DE LAURENT

- Permite centrar una serie de potencias en singularidades, a costa de admitir:

$$\boxed{f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n}$$

Por Cauchy, $a_n = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_\gamma \dfrac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \, dz$ → Al dividir entre $(z - z_0)^{n+1}$, el coeficiente de $\frac{1}{z - z_0}$ va a ser a_n (el resto de integrales son 0)

↳ Cualquier curva cerrada donde la serie converja y $z_0 \in \mathrm{Int}[\gamma]$

- $$f(z) = \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n}_{\text{Parte analítica}} + \underbrace{\sum_{n=-1}^{-\infty} a_n (z - z_0)^n}_{\text{Parte singular}} = g(z) + h\left(\frac{1}{z}\right)$$

Parte analítica ↓ Converge en discos hasta la singularidad más próxima

Parte singular ↓ Converge en exteriores de discos → $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} \left(\frac{1}{z - z_0}\right)^n$

Converge en sitios tipo $\left|\dfrac{1}{z - z_0}\right| < R$

$\boxed{|z - z_0| > \frac{1}{R}, \text{ con } R \text{ el radio de convergencia de } h}$

En el caso de las geométricas $\left(\frac{1}{z - a}\right)$, esto converge en el complementario de donde converge Taylor $\frac{1}{z - a}$

- Así, si una serie converge en un entorno menos el centro:
  - Ningún exponente negativo ⟹ Analítica
  - Finitos exponentes negativos ⟹ Polo en el centro
  - Infinitos exponentes negativos ⟹ Singularidad esencial en el centro

RESIDUOS

· Sea f analítica en $0 < |z - z_0| < R$. Es decir, z_0 puede ser singularidad aislada.

$$\boxed{\mathrm{Res}(f, z_0) \equiv \underbrace{\lim_{r \to 0}}_{\substack{\text{Se puede} \\ \text{eliminar (para } r<R, \\ \text{la integral no depende de } r)}} \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} f(z)\, dz}$$

· ¿Cómo se calcula?

· Si f es analítica en z_0, $\mathrm{Res}(f, z_0) = 0$

· $\underline{\mathrm{Res}(f, z_0) = a_{-1}}$; con a_{-1} el coeficiente -1 ésimo de su serie de Laurent (que converge a un entorno de z_0 salvo z_0)

Viene de poner f en la integral y que $\int \frac{1}{z^n} = 0\ \forall n \neq 1$, valiendo $2\pi i$ si $n=1$

· Si f tiene en z_0 un polo de orden K, $\boxed{\mathrm{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(K-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{K-1}}{dz^{K-1}} \left(f(z)(z-z_0)^K\right)}$

Es decir:
- Me cargo el polo
- Derivo $K-1$ veces
- Divido entre $(K-1)!$

· Su utilidad: (la idea es rodear todos los residuos )

Teorema de los residuos: Sea f analítica en $D \setminus \{z_1, \dots, z_n\}$ (nº finito), con:
- D simplemente conexo
- γ encierra a $\{z_1, \dots, z_n\}$ dando una vuelta (homotopa a una cerrada simple)
- γ positivamente orientada

$$\boxed{\int_\gamma f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{K=1}^{n} \mathrm{Res}(f, z_K)}$$

APLICACIONES DE RESIDUOS

INTEGRALES REALES → el truco es convertirlo a integral compleja y resolver con residuos

- $\displaystyle\int_0^{2\pi} R(\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)\, d\theta$: Es una integral de línea a lo largo del círculo unidad, con la parametrización: (se puede ver como un cambio de variable)

  - $z = e^{i\theta}$

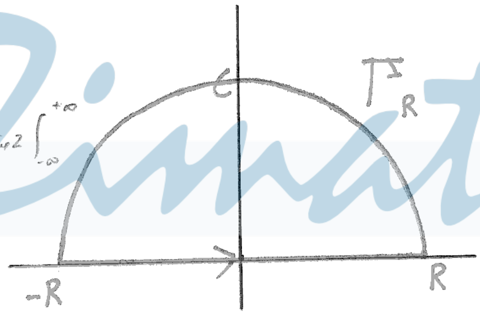
    $dz = i e^{i\theta} d\theta = i z\, d\theta$
  - $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{z - \frac{1}{z}}{2i}$

    $\cos\theta = \dfrac{z + \frac{1}{z}}{2}$

$$\boxed{\int_0^{2\pi} R(\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)\, d\theta = \int_{|z|=1} R\left(\frac{z - \frac{1}{z}}{2i}, \frac{z + \frac{1}{z}}{2}\right) \frac{1}{iz}\, dz}$$

- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\, dx$: la idea es

  ~~si es $\int_0^{+\infty}$~~, será porque el integrando es par ⇒ se divide entre 2 $\int_{-\infty}^{+\infty}$



$$\int_{-R}^{R} R(x)\, dx = \int_{\Gamma_R} R(z)\, dz - \int_{\substack{|z|=R \\ \operatorname{Im} z > 0}} R(z)\, dz$$

- La 1ª integral se hace con residuos

- La 2ª integral, se acota su módulo superiormente

Al tomar $R \to +\infty$:
- Nos sale la impropia
- $\displaystyle\int_{\Gamma_R}$ abarca todos los residuos con parte imaginaria positiva
- $\displaystyle\int_{|z|=R}$ tiende a 0

· Inciso: trucos para acotar:

· $|a+b| \le |a| + |b|$

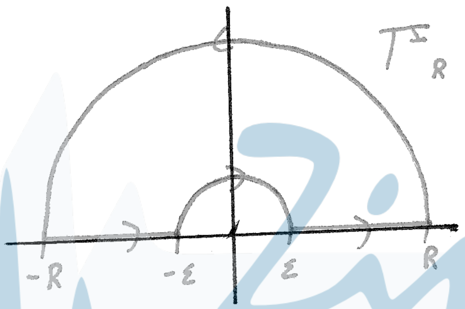
· $|a-b| \ge |a| - |b|$ (pq $|a| = |a-b+b| \le |a-b| + |b|$)

· $|z| \le R \iff \dfrac{1}{|z|} \ge R$

$|z| \ge R \iff \dfrac{1}{|z|} \le R$

· $\left|\int \quad\right| \le \int \left| \quad \right|$, siempre que el integrando esté ya parametrizado

· ¿Qué pasa si R tiene singularidades en $\mathbb{R}$? Hay que esquivarlas:



OJO CON LA ORIENTACIÓN!!!
Truco: orientar positivamente y cambiar el signo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\,dx = \lim_{\substack{R\to+\infty \\ \varepsilon\to 0}} \underbrace{\int_{T^\varepsilon_R} R(z)\,dz}_{\text{Por residuos}} - \underbrace{\int_{\substack{|z|=R \\ \operatorname{Im} z>0}} R(z)\,dz}_{\text{Se acota y va a 0}} - \underbrace{\int_{\substack{|z|=\varepsilon \\ \operatorname{Im} z>0}} R(z)\,dz}_{\text{Conmutamos integral y } \lim_{\varepsilon\to 0} \text{ (o si vemos que va a 0, mejor acotamos)}}$$

$\boxed{\text{Se puede reutilizar la cota de } R}$

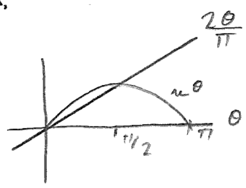
· $$\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\cdot \begin{matrix}\sin mx \\ \cos mx\end{matrix}\, dx = \operatorname{Re}/\operatorname{Im}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\, e^{imx}\, dx\right]$$ con $|F(z)| \le \dfrac{M}{R^k}$ si $|z| = R$; $k > 0$

· La idea es la misma que con los racionales

· Para acotar e^{imz}, se va a llegar a $e^{-mR\sin\theta}$ y se usa:

- $\int_0^{\pi} e^{-mR\sin\theta}\, d\theta = 2\int_0^{\pi/2} e^{-mR\sin\theta}\, d\theta$

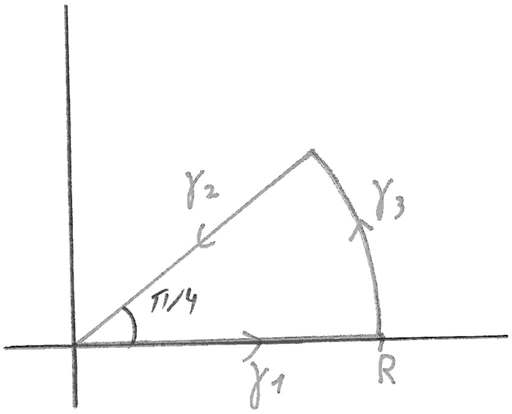
- $\forall \theta \in [0, \pi/2]$, $\sin\theta \ge \dfrac{2\theta}{\pi}$



así, $\int_{|z|=R}$ va a ir a 0

Integrales de Fresnel: $\int_0^{+\infty} \operatorname{sen} x^2\,dx$, $\int_0^{+\infty} \cos x^2\,dx$

Se integra e^{iz^2} a lo largo del camino:



- $\int_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3} = 0$ al ser e^{iz^2} exacta

- $\int_{\gamma_3}$ se acota con el truco de antes y va a 0

- $\int_{\gamma_1}$ va a lo que queremos si $R \to +\infty$

- $\int_{\gamma_2}$, al ir por $\sqrt{i}$, va a tener exponente real, aunque no se va a ir con lo de γ_1 (exponente imaginario); y no nos va a decir $0=0$.
  Al parametrizar sale $\int_0^{+\infty} e^{-r^2}\,dr = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

· Funciones irracionales. Hay que:

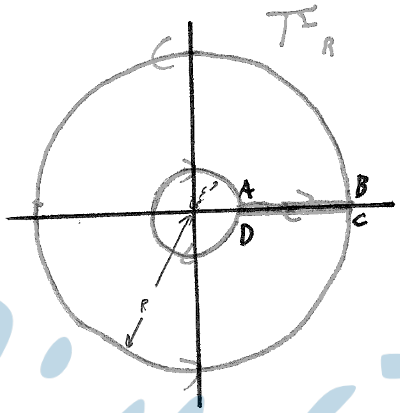
$\ln$

· ESQUIVAR EL PUNTO DE RAMIFICACIÓN

· EVITAR PASAR POR DONDE SON DISCONTINUAS (DONDE PEGAMOS EL HACHAZO AL ARGUMENTO)

Hay diferentes casos/métodos:

· $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$, con f ... . El camino es:



$\int_{\Gamma_R^\varepsilon}$ con residuos

Pegando el hachazo en el eje real positivo ($\theta \in [0, 2\pi]$):

· $\int_A^B$ se parametriza con argumento $0 \Rightarrow z = x$

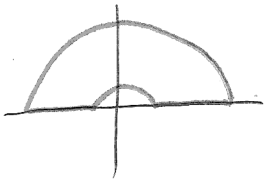
· $\int_B^C$ se acota y va a 0 si $R \to +\infty$

· $\int_C^D$ se parametriza con argumento $2\pi \Rightarrow z = xe^{2\pi i}$

· $\int_D^A$ se toma $\varepsilon \to 0$ (acotándola si va a 0)

Como $\int_A^B$ y $\int_C^D$ se han tomado con distinto argumento, no se van a ir (una será, en general, múltiplo de la otra)

· $\int_0^{+\infty} f(z)\,dz$: como las racionales:



· Cortando el argumento en $-\frac{\pi}{2}$

· Esquivando el 0

· Teniendo en cuenta que por lo general la rama principal de la raíz compleja no coincide con la raíz real $\forall \mathbb{R}$

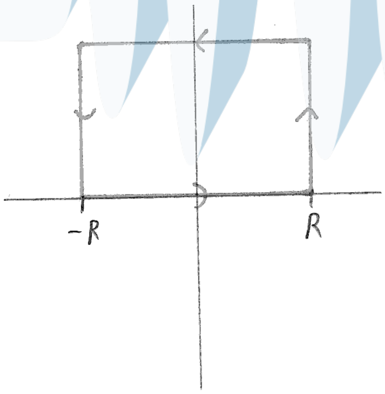
(Será múltiplo)

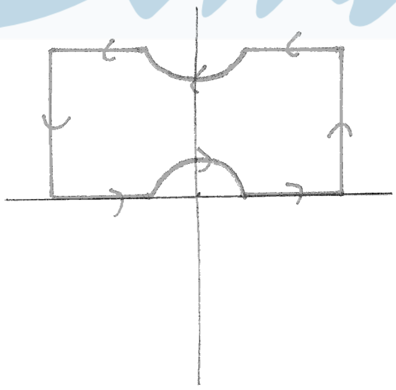
Ejemplo: $\sqrt[3]{x}$, elijo $z^{1/3} = \sqrt[3]{R}\,e^{i\frac{\theta}{3}}$

· Sobre $\mathbb{R}^+$: $\sqrt[3]{x}$

· Sobre $\mathbb{R}^-$: $\sqrt[3]{x}\,e^{i\frac{\pi}{3}} \neq -\sqrt[3]{x}$

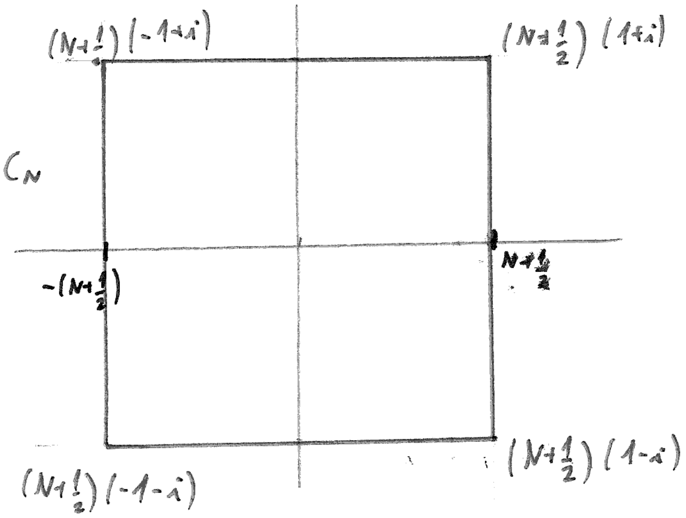
· Exponenciales o, en general, funciones [illegible]: como $\sum$ Residuos $=0$ y al hacer el camino $\to +\infty$ va a ir a 0, el truco es tomar dos caminos paralelos tq.; la integral en uno de ellos sea conocida; o bien las integrales sean múltiplos y los circulitos de evitar singularidades nos den la integral.





SUMAR SERIES

. Sea C_N el siguiente cuadrado:



. Sea $f(z)$ tq. $\forall z \in C_N$, $|f(z)| \leq \frac{M}{|z|^k}$; $M>0$, $k>1$

. Ahora, $\forall z \in C_N$, $|\pi \cot \pi z| \leq A \Rightarrow \int_{C_N} \pi \cot \pi z \, f(z) \, dz$ va a ir a 0 (se acota vía ML)

. Si $f(z)$ no tiene ceros ni polos en $\mathbb{Z}$: (son las singularidades de la cotg.)

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n) = -\sum_{\notin \mathbb{Z}} Res(f \cdot \pi \cot \pi z)$$

. Esto es así porque, si f no tiene ceros ni polos en n, $Res[\pi \cot \pi z \, f(z), z=n] = f(n) \ \forall n \in \mathbb{Z}$ y al sumar los residuos queda $\sum_{n=-N}^{N} f(n)$. Al tomar $N \to +\infty$ sale la serie.

. Si f tiene ceros/polos en $\mathbb{Z}$, ese residuo se calcula aparte:

$$\sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq j}}^{+\infty} f(n) = -\sum_{j} Res(f \cdot \pi \cot \pi z) - \sum_{\neq j} Res(f \pi \cot \pi z)$$

con j todos los polos y ceros enteros de f

PRINCIPIO DEL ARGUMENTO:

. Sean: γ una curva cerrada simple

f sin singularidades esenciales

$$\boxed{\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = Z - P}\ ,\ \text{con}$$

nº de coeficientes consecutivos nulos en la serie de " potencias

. Z el número de ceros de $f(z)$ dentro de γ (contando multiplicidad)

. P el número de polos de $f(z)$ dentro de γ (contando multiplicidad)

orden del polo

Como con residuos, nos limitamos al caso de 1 cero/1 polo:

. Cero de orden n: $f(z) = (z-c)^n g(z)$; con $g(c) \neq 0$, g analítica

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \int_\gamma \frac{(z-c)^n g'(z) + n(z-c)^{n-1} g(z)}{(z-c)^n g(z)}\,dz =$$

$$= \underbrace{\int_\gamma \frac{g'(z)}{g(z)}\,dz}_{=\ 0 \text{ por ser } \gamma \text{ cerrada y } g \text{ analítica}} + n\int_\gamma \frac{1}{z-c}\,dz = \begin{cases} 2\pi i n & \text{si } c \in \mathrm{Int}[\gamma] \\ 0 & \text{si } c \notin \mathrm{Int}[\gamma] \end{cases}$$

. Polo de orden n: $f(z) = \dfrac{g(z)}{(z-c)^n}$, $g(c) \neq 0$, g analítica

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \int_\gamma \frac{\dfrac{g'(z)(z-c)^n - g(z)\,n\,(z-c)^{n-1}}{(z-c)^{2n}}}{\dfrac{g(z)}{\cancel{(z-c)^n}}}\,dz =$$

$$= \underbrace{\int_\gamma \frac{g'(z)}{g(z)}\,dz}_{=\ 0} - n\int \frac{1}{z-c}\,dz = \begin{cases} -2\pi i n & \text{si } c \in \mathrm{Int}[\gamma] \\ 0 & \text{si } c \notin \mathrm{Int}[\gamma] \end{cases}$$