TEMA III. CÁLCULO DE VARIACIONES. MECÁNICA ANALÍTICA

JORGE RODRÍGUEZ

Introducción del cálculo variacional

El problema abordado por el cálculo variacional es, dada una función f, hallar $y = y(x)$ tal que la integral:

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f\{y, y', x\}\, dx \quad \text{es un extremal.}$$

Introducimos todas las funciones posibles como $y(x,\alpha)$, considerando que la que buscamos es la que hace el extremal cuando $\alpha = 0$

$$y(x,\alpha) = y(x,0) + \alpha\eta(x)$$

Donde $\eta(x)$ es una función cualquiera que se anula para x_1 y x_2

Sustituyendo en la integral:

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f\{y(x,\alpha), y'(x,\alpha); x\}\, dx$$

Como tiene que ser extremal, lo será $\iff$

$$\left.\frac{\partial J}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0} = 0$$

Por lo tanto la condición es:

$$\left.\frac{\partial J}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0} = \left.\frac{\partial}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0} \int_{x_1}^{x_2} f\{y, y'; x\}\, dx = 0$$

Aplicando reglas generales de derivación:

$$\left.\frac{\partial J}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y}\eta(x) + \frac{\partial f}{\partial y'}\eta'(x)\right] dx = 0 \implies$$

$$\implies \left.\frac{\partial J}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\eta(x)\, dx = 0$$

Y como $\eta(x)$ es arbitraria, se cumplirá $\iff$ $\boxed{\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} = 0}$ Que es la "Ecuación Euler-Lagrange"

Problemas con varias variables

Puede darse el caso de que el funcional f dependa de varias variables.
Supongamos que hay "m" incógnitas dependientes. Tenemos entonces:

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f\{y_i(x), y_i'(x); x\}\, dx \qquad i = 1, \dots, m$$

Lo que se traduce al hacer $\delta J = 0$ en un sistema de m ecuaciones de Lagrange-Euler.

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y_i'}\right) = 0} \qquad i = 1, \dots, m$$

Problemas con ligaduras

Supongamos que ahora tenemos un sistema de "n" incógnitas dependientes dentro de la integral, y además, tenemos "m" restricciones del tipo $g_j(y_i, x) = 0$
Queremos efectuar el extremal de:

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f\{y_i(x), y_i'(x); x\}\, dx \quad \text{restringido por } g_j(y_i, x) = 0$$

Lo que tenemos en la práctica, es un sistema de $m+n$ ecuaciones con $m+n$ incognitas formado por:

$$\boxed{\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial y_i} - \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y_i'}\right) + \displaystyle\sum_{j=1}^{m} \lambda_j \dfrac{\partial g_i}{\partial y_i} = 0 \qquad i = 1, \dots, m \\[2ex] \qquad g_j(y_i, x) = 0 \qquad j = 1, \dots, m \qquad i = 1, \dots, m \end{array}}$$

Equivalentemente las ligaduras se pueden expresar:

$$\sum_i \frac{\partial g_j}{\partial y} dy_i = 0 \quad \begin{cases} i = 1, \dots, n \\ j = 1, \dots, m \end{cases}$$

Donde λ_j son los multiplicadores de lagrange, que en ocasiones tiene un significado físico relacionado con las fuerzas de ligadura.

APLICACIÓN A LAS ECUACIONES DE LAGRANGE

Supongamos un sistema de N partículas, en el espacio $\mathbb{E}^3$ moviendose con m ecuaciones de restricción. El número de grados de libertad es por tanto $s = 3N - m$.

Escribimos las coordenadas generalizadas $q_i = 1, \dots, s$

Si el nº de coordenadas generalizadas coincide con el de grados de libertad se dice que es un sistema de coordenadas propio.

Para cada partícula α, tendremos una relación entre las coordenadas cartesianas y las generalizadas.

$$x_{\alpha,i} = x_{\alpha,i}(q_1, \dots, q_s, t) = x_{\alpha,i}(q_j, t) \qquad \begin{array}{l} i = 1,2,3 \\ j = 1, \dots, s \\ \alpha = 1, \dots, N \end{array}$$

E igualmente las velocidades generalizadas:

$$\dot{q}_j \qquad j = 1, \dots, s$$

Y evidentemente

$$\dot{x}_{\alpha,i} = \dot{x}_{\alpha,i}(q_j, \dot{q}_j, t) \Rightarrow \dot{q}_j = q_j(x_{\alpha,i}, \dot{x}_{\alpha,i}, t)$$

Clases de ligaduras

Existen 2 tipos:

- Holónomas $\Rightarrow$ Cuando se pueden escribir como relaciones algebraicas entre coordenadas.
- Anholónomas $\Rightarrow$ Cuando se da el caso contrario (inecuaciones o ecuaciones diferenciales no integrables).

El principio de Hamilton

Dada una partícula en $\mathbb{R}^3$ que se mueve en el espacio, sin restricción y su posición es (x, y, t). Bajo un campo de fuerza conservativa $\vec{F}(\vec{r})$

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

$$U = U(x, y, z)$$

Definimos el lagrangiano como:

$$\mathcal{L} = T - U = \mathcal{L}(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}).$$

El principio de Hamilton establece que:

Dados 2 puntos (x_1, y_1, z_1) y (x_2, y_2, z_2), la trayectoria descrita por cualquier cuerpo es la que minimiza la integral:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}\, dt$$

Luego, de aquí surgen las ecuaciones de Lagrange

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right) = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}}\right) = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}}\right) = 0 \end{aligned}\right. \xRightarrow{\text{coord. generalizadas}} \left.\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1}\right) = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_2} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_2}\right) = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_3} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_3}\right) = 0 \end{aligned}\right\}$$

Se dicen "Fuerzas generalizadas" a: $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = F_i$

y "momentos generalizados" a: $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = P_i$

Generalizando para N partículas, tendremos que minimizar la integral:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(x_i, y_i, z_i, \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i)\, dt \qquad i = 1, \dots, N$$

Lo que resultará: $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i}\right) = 0 \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}_i}\right) = 0 \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}_i}\right) = 0 \qquad i = 1, \dots, N$

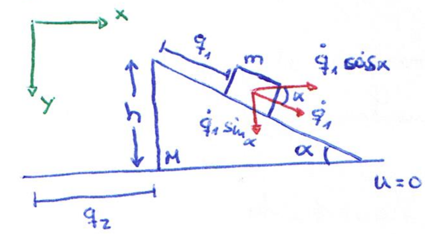
Y en coordenadas generalizadas:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t)\, dt \qquad i = 1, \dots, 3N$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) = 0 \qquad i = 1, \dots, 3N$$

Se demuestra por último que cuando el movimiento se realiza en un sistema con fuerzas de ligadura no conservativas, se puede aplicar el principio de Hamilton, teniendo en cuenta sólo las fuerzas conservativas.

Ejemplo 1



$h = q_1 \sin\alpha$

$U_m = -mg\, q_1 \sin\alpha$

$U_M = 0$

$$V_m = (\dot q_1 \cos\alpha + \dot q_2)\,\hat\imath + (\dot q_1 \sin\alpha)\,\hat\jmath$$

$$T_m = \frac{1}{2} m \left[(\dot q_1 \cos\alpha + \dot q_2)^2 + (\dot q_1 \sin\alpha)^2 \right] = \frac{1}{2} m \left(\dot q_1^2 + \dot q_2^2 + 2 \dot q_1 \dot q_2 \cos\alpha \right)$$

$$T_M = \frac{1}{2} M \dot q_2^2$$

$$\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2} M \dot q_2^2 + \frac{1}{2} m \left(\dot q_1^2 + \dot q_2^2 + 2 \dot q_1 \dot q_2 \cos\alpha \right) + mg\, q_1 \sin\alpha$$

1) $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1} - \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q_1} \right) = 0 \implies mg \sin\alpha - m(\ddot q_1 + \ddot q_2 \cos\alpha) = 0$

2) $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_2} - \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q_2} \right) = 0 \implies \dfrac{d}{dt}\left[M \dot q_2 + m(\dot q_2 + \dot q_1 \cos\alpha) \right] = 0$

Diferenciando la 2ª

$$M \ddot q_2 + m(\ddot q_2 + \ddot q_1 \cos\alpha) = 0 \qquad \ddot q_2 = \frac{-\ddot q_1 \cos\alpha}{M+m}$$

Sustituyendo en la primera:

$$mg \sin\alpha - m\left(\ddot q_1 - \frac{\ddot q_1 \cos\alpha}{M+m} \cos\alpha \right) = 0 \implies \ddot q_1 = \frac{g \sin\alpha}{1 - \dfrac{M \cos^2\alpha}{M+m}} = \text{cte}$$

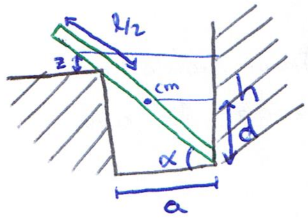
Y su ecuación de movimiento será:

$$q_1(t) = q_{1i} + \dot q_{1i}\, t + \frac{1}{2} \ddot q_{1i}\, t^2$$
$$q_2(t) = q_{2i} + \dot q_{2i}\, t + \frac{1}{2} \ddot q_{2i}\, t^2$$

donde se puede asumir que: $q_1(0) = q_2(0) = \dot q_1(0) = \dot q_2(0) = 0$

Ejemplo 2

Hallar una condición de equilibrio para el siguiente sistema:



será estable $T=0$

Tomemos α como coordenada generalizada. Como podemos imponer y constante para todo el sistema, entonces se puede considerar en términos de energía potencial, que toda la masa esté en el c.m.

$$U = mgz = mg(h-d) = mg\left(\tfrac{l}{2} \sin\alpha - a \tan\alpha\right)$$

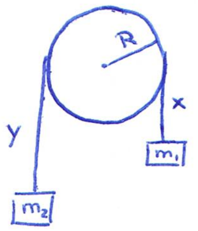
Luego $\mathcal{L} = -U = -mg\left(\tfrac{l}{2} \sin\alpha - a \tan\alpha\right)$

La condición de equilibrio será:

$$\frac{\partial U}{\partial \alpha} = 0$$

$$\frac{l}{2} \cos\alpha - \frac{a}{\cos^2\alpha} = 0 \qquad \cos^3\alpha = \frac{2a}{l} \implies \alpha = \arccos \sqrt[3]{\frac{2a}{l}}$$

Ejemplo 3



Usaremos los multiplicadores de Lagrange para resolver el problema, hallando también la tensión de las cuerdas.

Como la longitud total de la cuerda es L, la ecuación de ligadura es:

$$x + y + \pi R = L \implies x + y + \pi R - L = 0$$

Ahora

$$\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{y}^2 + m_1 g x + m g y$$

Luego el sistema es:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right) = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}}\right) = 0 \\ x + y + \pi R - L = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} m_1 g - \frac{d}{dt}(m_1 \dot{x}) + \lambda = 0 \\ m_2 g - \frac{d}{dt}(m_2 \dot{y}) + \lambda = 0 \\ x + y + \pi R - L = 0 \end{cases} \implies \begin{array}{l} \ddot{x} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g \\ \ddot{y} = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} g \end{array}$$

$$\lambda = m_1 \ddot{x} + m_1 g = \frac{2 m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$$

De donde

$$\ddot{x} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g \implies \dot{x} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g t + C_1 \implies x = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g t^2 + C_1 t + C_2$$

$$\ddot{y} = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g \implies \dot{y} = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g t + D_1 \implies y = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g t^2 + D_1 t + D_2$$

Teorema de Noether

Cuando el operador Lagrangiano no depende de alguna de las coordenadas generalizadas, entonces la fuerza asociada a esa coordenada es 0: $F_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}$

Esto lleva a la conservación del momento generalizado asociado $P_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$, en ese caso, a la coordenada se le llama cíclica.

El teorema de Noether es el que asocia la simetría de un sistema físico a la independencia de $\mathcal{L}$ respecto de alguna coordenada generalizada, lo cual lleva a la conservación del momento generalizado.

Conservación del momento lineal

Para un sistema aislado, sabemos que el momento lineal se conserva pues $\nexists \vec{F}_{ext}$ y por tanto $\vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{p}}{dt}$

Supongamos un sistema aislado de N partículas. Desde el punto de vista mecánico:

$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$ que no depende de la posición.

Así mismo U, sólo depende de posiciones relativas, así que no se ve afectado por el cambio de coordenadas. Es decir:

$$U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = U(\vec{r}_1 + \delta\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N + \delta\vec{r}_N)$$

Por tanto, si se varían la posición de todas las partículas, el lagrangiano no cambia,

$$\mathcal{L}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = \mathcal{L}(\vec{r}_1 + \delta\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N + \delta\vec{r}_N) \Rightarrow \delta\mathcal{L} = 0$$

En efecto si:

$$0 = \delta\mathcal{L} = \sum_{i=1}^{N}\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_i}\delta x + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y_i}\delta y + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial z_i}\delta z\right] = \left(\sum_i^N \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_i}\right)\delta x + \left(\sum_i^N \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y_i}\right)\delta y + \left(\sum_i^N \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial z_i}\right)\delta z$$

Como la variación es arbitraria, se cumplirá $\Longleftrightarrow$

$$\sum_i^N \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_i} = \sum_i^N \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y_i} = \sum_i^N \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial z_i} = 0$$

Tomando cualquiera de ellos, por ejemplo $\sum_i^N \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_i} = 0$ y usando las ecuaciones de Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_i} = 0 \Rightarrow \sum_i^N \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i}\right) - \sum_i^N \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_i} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\sum_i^N \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i}\right) = \sum_i \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_i} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}(P_x) = 0 \Rightarrow \{P_x = cte\}$$

En efecto, el momento total se conserva. La simetría asociada a la conservación del momento es la homogeneidad del espacio.

Conservación del momento angular

Los sistemas inerciales son isótropos, es decir, las propiedades mecánicas no se ven afectadas por la orientación del sistema. Por tanto, la isotropía del espacio es la que afecta a la conservación del momento angular.

Tomando un sistema aislado, considerando una sola partícula. Tendrá una relación entre sus coordenadas euclídeas y las generalizadas:

$$q_i = q_i(x_1, x_2, x_3) \Rightarrow \dot{q}_i = \dot{q}_i(x_1, x_2, x_3)$$

La lagrangiana del sistema será:

$$\mathcal{L} = T - U = \mathcal{L}(\dot{x}_i, x_i) \quad i = 1,2,3$$

Supongamos que tomamos un giro $\delta\vec{\theta}$ alrededor de un cierto eje:

$$\delta\mathcal{L} = \sum_{i=1}^{3}\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_i}\delta x_i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i}\delta\dot{x}_i\right] = 0 \quad \text{(El sistema es aislado)}$$

Pero por definición podemos poner:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} = P_i \qquad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_i} = F_i = \dot{P}_i \qquad \text{así que}$$

$$\delta\mathcal{L} = \sum_i^3[\dot{P}_i\delta x_i + P_i\delta\dot{x}_i] = \dot{\vec{P}}\delta\vec{r} + \vec{P}\delta\dot{\vec{r}}$$

Aplicando que en un giro $\delta\vec{\theta}$ la variación es $\delta\vec{r} = \delta\vec{\theta}\wedge\vec{r}$ se tiene que:

$$\dot{\vec{P}}(\delta\vec{\theta}\wedge\vec{r}) + \vec{P}(\delta\vec{\theta}\wedge\dot{\vec{r}}) = \delta\vec{\theta}(\vec{r}\times\dot{\vec{p}}) + \delta\vec{\theta}(\dot{\vec{r}}\wedge\vec{r}) = \delta\vec{\theta}[(\vec{r}\times\dot{\vec{p}}) + (\dot{\vec{r}}\times\vec{p})]$$

Como $\delta\vec{\theta}$ es arbitrario $\Longleftrightarrow$ $(\vec{r}\times\dot{\vec{p}}) + (\dot{\vec{r}}\times\vec{p}) = \vec{0}$

Pero eso es precisamente $\frac{d}{dt}(\vec{r}\times\vec{p}) = \frac{d}{dt}\vec{J}$

Entonces $\frac{d}{dt}\vec{J} = 0 \Rightarrow \{\vec{J} = cte\}$

Esto se podía observar pues $\underline{\theta \text{ es cíclica}}$

Conservación de la energía

Se asocia a la homogeneidad del tiempo. Tomando n el grado de libertad de un sistema de N partículas. Sabemos que:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{\alpha}^{N} m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha^{\,2} \qquad \alpha = 1, \dots, N$$

Tambien habrá una relación entre $\vec{r}_\alpha$ y las generalizadas q_i

$$\vec{r}_\alpha = \vec{r}_\alpha(q_i) \Rightarrow \dot{\vec{r}}_\alpha = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_i}\dot{q}_i \qquad \text{imponiendo un sistema propio.}$$

luego: $$\dot{\vec{r}}_\alpha^{\,2} = \sum_{i}^{N} \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_i}\dot{q}_i \left(\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_j}\dot{q}_j\right) = \sum_{i,j}^{N} \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_i}\frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_j}\dot{q}_i\dot{q}_j$$

Por tanto:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{\alpha}^{N} m_\alpha \left(\sum_{i,j}^{N} \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_i}\frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_j}\dot{q}_i\dot{q}_j\right) = \frac{1}{2}\sum_{i,j}^{N} A_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j$$

A_{ij} que depende de (q_i, q_j)

Ahora:

$$\mathcal{L} = T - U \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \qquad \text{al no depender } U \text{ de } \dot{q}_i$$

Si hacemos:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \frac{1}{2}\,2\sum_{j}^{N} A_{ij}\dot{q}_j = \sum_{j}^{N} A_{ij}\dot{q}_j \qquad \forall i = 1, \dots, N$$

Entonces llegamos al resultado de que:

$$\left\{ \sum_{i}^{N} p_i \dot{q}_i = \sum_{i}^{N} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i = \sum_{i}^{N}\sum_{j}^{N} A_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j = 2T \right\}$$

Ahora como el tiempo es homogeneo en un sistema aislado se cumple que $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = \sum_{i=1}^{N}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i\right] = \sum_{i=1}^{N}\left(\dot{p}_i\dot{q}_i + p_i\ddot{q}_i\right) = \sum_{i}^{N}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right)\dot{q}_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i\right] = \sum_{i}^{N}\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\right]$$

De donde:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{dt} - \sum_{i}^{N}\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\right] = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left[\mathcal{L} - \sum_{i}^{N}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\right] = 0$$

Entonces: $$\mathcal{L} - \sum_{i}^{N}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i = cte = -H$$

Y como $\sum_{i}^{N}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i = \sum_{i}^{N} p_i\dot{q}_i = 2T$ y $\mathcal{L} = T - U$ entonces:

$$T - U - 2T = -(T+U) = -H = cte \Rightarrow \boxed{H = T + U = cte}$$

Así que cuando el Lagrangiano no depende explicitamente de t, y U no depende de velocidades generalizadas, el Hamiltoniano es la energía total y además, se conserva.

Mecánica de Hamilton. Ecuaciones Canónicas del movimiento

Se define el Hamiltoniano como:

$$H = \sum_{i}^{n} p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}$$

El Hamiltoniano es un operador parecido al Lagrangiano, pero

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t) \qquad y \qquad H = H(q_i, p_i, t)$$

Tomando el diferencial del Hamiltoniano:

$$dH = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial H}{\partial p_k} dp_k \right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(p_k d\dot{q}_k + dp_k \dot{q}_k \right) - \sum_{k} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} d\dot{q}_k \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt$$

Y como $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} d\dot{q}_k = \dot{p}_k d\dot{q}_k$ tenemos que:

$$dH = \sum_{k}^{n} \left(\dot{q}_k dp_k - \dot{p}_k dq_k \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt$$

De donde se deducen las ecuaciones canónicas del movimiento

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{q}_k = \dfrac{\partial H}{\partial p_k} \\ \dot{p}_k = -\dfrac{\partial H}{\partial q_k} \end{array} \quad k = 1, \dots, n \right\} \qquad \text{Además} \quad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$$

Integral de Jacobi

Para cada coordenada generalizada, hay 2 ecuaciones canónicas.
Mediante el análisis del tiempo podemos llegar a la integral de Jacobi:

$$dH = \sum_{i}^{n} \left[\left(\frac{\partial H}{\partial q_i} \right) dq_i + \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \right) dp_i \right] + \frac{\partial H}{\partial t} dt$$

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{i}^{n} \left[\left(\frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \left(\frac{dq_i}{dt} \right) + \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \right) \left(\frac{dp_i}{dt} \right) \right] + \frac{\partial H}{\partial t}$$

Usando las ecuaciones canónicas

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i \\ \dfrac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i \end{array} \right\}$$

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{i}^{n} \left[(-\dot{p}_i)(\dot{q}_i) + \dot{p}_i \dot{q}_i \right] + \frac{\partial H}{\partial t}$$

Llegando a la "Integral de Jacobi"

$$\boxed{\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}}$$

La integral de Jacobi implica que si el Hamiltoniano no depende explícitamente de t $\left(\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \right)$, entonces se conserva, y es una integral primera del movimiento.

Espacios físicos

Supongamos un sistema de s grados de libertad. Tendremos entonces un sistema de coordenadas propio y unos momentos generalizados asociados $\{q_i, p_i\}$ $i=1,\dots,s$

- Cuando estamos en el espacio de $\{q_1,\dots,q_s\}$ se dice que es el "espacio de configuraciones"
- Cuando es el espacio de $\{p_1,\dots,p_s\}$ se le llama "espacio de momentos"
- El espacio $\{p_1,\dots,p_s, q_1,\dots,q_s\}$ se llama espacio físico y en él podemos ver representada la trayectoria del objeto como proyección de la solución real.

Corchetes de Poisson

Dado el sistema de s grados de libertad, se define el operador "corchetes de Poisson" de la función (g,h) como

$$[g,h] = \sum_{k=1}^{s}\left(\frac{\partial g}{\partial q_k}\frac{\partial h}{\partial p_k} - \frac{\partial g}{\partial p_k}\frac{\partial h}{\partial q_k}\right)$$

Los corchetes de Poisson cumplen que:

(i) $\dfrac{dg}{dt} = [g,H] + \dfrac{\partial g}{\partial t}$

(ii) $\dot{q}_j = [q_j, H]$ $\qquad \dot{p}_k = [p_k, H]$

(iii) $[p_k, p_j] = [q_k, q_j] = 0$ $\qquad k,j = 1,\dots,s$

(iv) $[q_k, p_j] = \delta_{kj}$

Cuando el corchete de poisson de dos funciones es 0, se dice que conmutan. Si es 1, son canónicamente conjugadas.