# EDO DE 1$^{er}$ ORDEN

OJO! Al multiplicar/dividir por $f$:

· Divido $\Rightarrow$ Comprobar que $f=0$ no es solución antes de dividir. Si lo es, hay que ponerla.

· Multiplico $\Rightarrow$ Si $f=0$ no es solución antes de multiplicar, multiplicar te crea la solución $f=0$

1- ¿Es lineal? $c(x)\cdot y' + a(x)\cdot y = b(x)$

$$\Updownarrow$$

$$y' + A(x)\,y = B(x)$$

• Se resuelve la ec. homogénea: $y_H' + A(x)\,y_H = 0$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{y_H'}{y_H} = -A(x) \Leftrightarrow \frac{d(\ln y_H)}{dx} = -A(x)$$

$$\Updownarrow$$

$$\ln y_H = \left(-\int A(x)dx\right) + C$$

$$\Updownarrow$$

$$y_H = K\cdot e^{-\int A(x)dx}$$

• Se busca una sol. particular que, sumada a $y_H$ será sol. gen. Si no:

• Se sustituye la cte. por una función de $x$ y se lleva a la EDO:

$$y = f(x)\cdot e^{-\int A dx}$$

$$\Downarrow$$

$$y' = -A\cdot f(x)\cdot e^{-\int A dx} + f'(x)\cdot e^{-\int A dx}$$

$$f'\cdot e^{-\int A dx} - Af\cdot e^{-\int A dx} + Af\cdot e^{-\int A dx} = B$$

Se deben ir todas las $f$ y quedar sólo $f'$

$$f' = B\cdot e^{\int A dx}$$

$$f = \int B\cdot e^{\int A dx}\,dx + C$$

OJO!

$$\Downarrow$$

$$\boxed{y = e^{-\int A dx}\left[\int B\cdot e^{\int A dx} + C\right]}$$

2- Se pone en forma sinética $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$

(Si P sólo depende de x y Q sólo de y, se integra y se obtiene la solución) (Si P y Q se pueden descomponer en factores que sólo dependen de x y de y, la ecuación es separable)

Se hace $\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}$

2.1- Si $\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$ (exacta) $\Rightarrow$ se sabe resolver: $P = \frac{\partial u}{\partial x}$; $Q = \frac{\partial u}{\partial y}$

- Se integra $P \xrightarrow{\text{resp. a } x}$ o $Q \xrightarrow{\text{resp. a } y}$ (la más fácil) y sumándole como cte. una función de la otra var.:

$$u(x,y) \equiv \int P\,dx + h(y)$$

- Se impone que $\frac{\partial u}{\partial y} = Q$ si se ha integrado P o que $\frac{\partial u}{\partial x} = P$ si se ha integrado y $\Rightarrow$ se obtiene h

Aquí $\begin{cases} x \text{ si se hace } \frac{\partial u}{\partial y} = Q \\ y \text{ si se hace } \frac{\partial u}{\partial x} = P \end{cases}$ se tiene que ir

- La solución es $u(x,y) = C$

2.2- Si $\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \neq 0$, hay que buscar un factor integrante $\left(\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}\right)$:

- $\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)\frac{1}{Q}$ sólo depende de x $\Rightarrow \exists\, \mu = \mu(x)$ $\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)\frac{1}{Q} = \frac{d(\ln \mu)}{dx}$

- $\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)\frac{1}{P}$ sólo depende de y $\Rightarrow \exists\, \mu = \mu(y)$ $\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)\frac{1}{P} \overset{\text{ojo!!}}{=} -\frac{d(\ln \mu)}{dy}$

- $\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)\cdot\frac{1}{Q-P}$ sólo depende de $(x+y)$ $\Rightarrow \exists\, \mu = \mu(x+y)$ $\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)\frac{1}{Q-P} = \frac{d(\ln \mu)}{d(x+y)}$

$\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)\frac{1}{Q\cdot y - P\cdot x}$ sólo depende de $x\cdot y$ $\Rightarrow \frac{d(\ln \mu)}{d(x\cdot y)} = \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)\frac{1}{Q\cdot y - P\cdot x}$

$\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)\cdot\frac{1}{Q+P}$ sólo depende de $(x-y)$ $\Rightarrow \frac{d(\ln \mu)}{d(x-y)} = \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)\cdot\frac{1}{Q+P}$

$\left[\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)\cdot\frac{1}{Q+P}\right.$ sólo depende de $(y-x)$ $\Rightarrow -\frac{d(\ln \mu)}{d(y-x)} = \left.\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)\cdot\frac{1}{Q+P}\right]$

# 3 - Cambios de variable

## 3.1 - EDO homogéneas

EDO homogéneas $\iff \begin{cases} P(ax, ay) = a^n P(x,y) \\ Q(ax, ay) = a^n Q(x,y) \end{cases} \iff y'(x,y) = y(ax, ay)$

$\approx$ Es un cociente con mismo grado arriba y abajo (ver 2.8)

- Se obtiene $y'$, que sólo va a depender de $\frac{y}{x}$
- Se hace el cambio de variable $u = \frac{y}{x}$
- Escribiendo $y' = (xu)' = u + xu'$ e igualándolo a $y'$ se obtiene una EDO separable

## 3.2 - EDO del tipo $y' = f\left(\frac{ax + by + c}{\alpha x + \beta y + \gamma}\right)$

### 3.2.1 - Si las rectas son paralelas $\iff \frac{\alpha}{a} = \frac{\beta}{b} = K$

- $y' = f\left(\frac{ax + by + c}{K(ax + by) + \gamma}\right) = F(ax + by)$
- Se hace el cambio $ax + by = u$
- Ahora, $u' = a + by' = a + b\,F(u) = u' \implies$ SEPARABLE

### 3.2.2 - Si las rectas no son paralelas: sea $(x_0, y_0)$ el pto. común

- Se hace el cambio $\begin{cases} X = x - x_0 \\ Y = y - y_0 \end{cases}$
- Ahora, $\frac{dY}{dX} = \frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax + by + c}{\alpha x + \beta y + \gamma}\right) = f\left(\frac{aX + bY}{\alpha X + \beta Y}\right) =$

  $= f\left(\frac{a + b\,Y/X}{\alpha + \beta\,Y/X}\right)$, homogénea

3.3- EDO de Bernoulli $\iff y' + A(x)y = B(x)\cdot y^n$

- Se divide por $y^n$: $\dfrac{y'}{y^n} + A(x)\cdot y^{1-n} = B(x)$

$\dfrac{y'}{y^n} \propto (y^{1-n})'$

- Se hace el cambio de variable $u = y^{1-n}$

- Ahora, $u' = (1-n)\dfrac{y'}{y^n}$, por lo que la EDO queda lineal:

$$\frac{u'}{1-n} + A(x)\cdot u = B(x)$$

4- Método de derivación: se deriva a ver si queda una EDO resoluble (útil, por ejemplo, si y' aparece al cuadrado)

OJO! La solución dependerá de 2 ctes. Para arreglarlo se lleva la solución a la EDO original, lo cual fija una de las ctes.