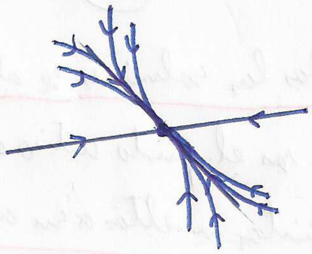
PUNTOS CRÍTICOS Y ESTABILIDAD

1- RAÍCES REALES Y DISTINTAS

· $k_- < k_+ < 0$ (ambas negativas): NODO ASINTÓTICAMENTE ESTABLE

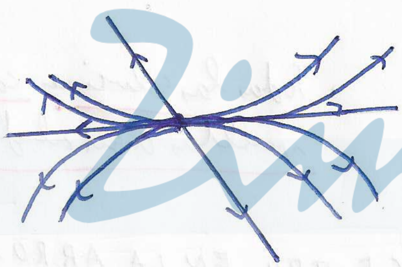
$|A|>0$
$\operatorname{tr} A<0$



· Todas las soluciones salvo una entran con la pendiente del autovalor más grande. → Esta entra con la pte. del otro autovalor

· $0 < k_- < k_+$ (ambas positivas): NODO INESTABLE

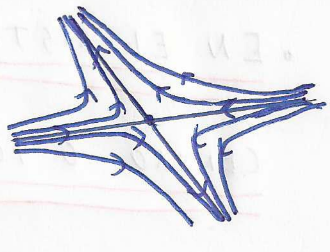
$|A|>0$
$\operatorname{tr} A>0$



· Todas las soluciones salvo una salen con la pendiente del autovalor más pequeño → Esta sale con la pte. del otro autovalor

· $k_- < 0 < k_+$ (distinto signo): PUERTO/PUNTO DE SILLA

$|A|<0$



· Una solución sale con la pendiente del autovalor positivo
· Una solución entra con la pendiente del autovalor negativo
· El resto provienen ($t \to -\infty$) del espacio estable y van ($t \to +\infty$) al espacio inestable (NO pasan por el punto crítico)

2- RAÍCES COMPLEJAS (Nota: la parte real es la traza)

· Parte real positiva: FOCO INESTABLE

$\mathrm{tr}\, A > 0$

· Todas las soluciones se alejan del punto crítico en espirales

· Al ser el punto crítico algo asintótico (hay una exponencial), dan infinitas vueltas a su alrededor.

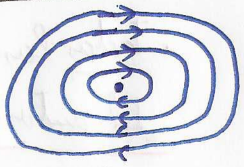
· Parte real negativa: FOCO ASINTÓTICAMENTE ESTABLE

$\mathrm{tr}\, A < 0$

· Todas las soluciones caen al punto crítico dando infinitas vueltas a su alrededor.

· Parte real nula: CENTRO EN LA APROXIMACIÓN LINEAL

$\mathrm{tr}\, A = 0$



· Las soluciones dan vueltas alrededor del punto crítico en órbitas cerradas.

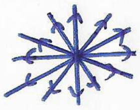
· EN EL SISTEMA COMPLETO PUEDE SER CENTRO O FOCO

3- RAÍCES IGUALES

· 2 vectores propios: NODO PROPIO/EN ESTRELLA EN LA APROXIMACIÓN LINEAL

$A = \frac{1}{2} \operatorname{tr} A \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

- Valor propio positivo $\Rightarrow$ INESTABLE



$\operatorname{tr} A > 0$

- Valor propio negativo $\Rightarrow$ ESTABLE

$\operatorname{tr} A < 0$

· Todas las soluciones son rectas. Es más, cualquier recta es solución

· EN EL SISTEMA COMPLETO:

- SE MANTIENE LA ESTABILIDAD
- PUEDE SER:
  - Nodo propio
  - Foco
  - Nodo

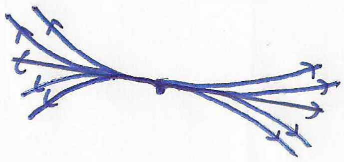
· 1 vector propio: NODO DEGENERADO EN LA APROXIMACIÓN LINEAL

$a_{12}^2 + a_{21}^2 \neq 0$

$\Updownarrow$

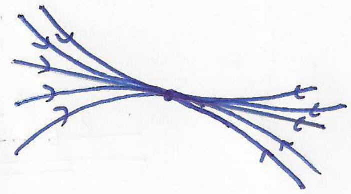
Hay términos no diagonales no nulos

- Valor propio positivo $\Rightarrow$ INESTABLE



$\operatorname{tr} A > 0$

- Valor propio negativo $\Rightarrow$ ESTABLE



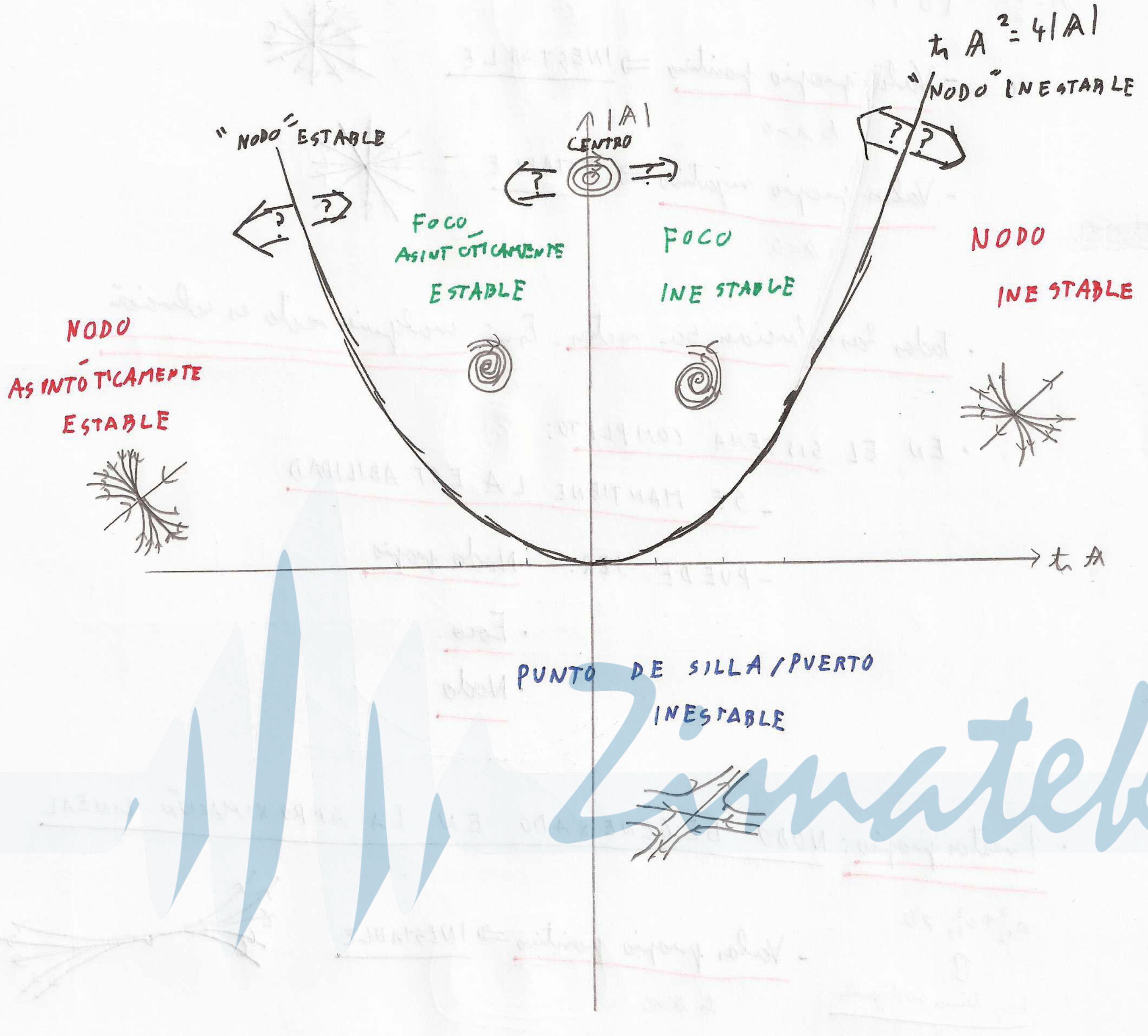
$\operatorname{tr} A < 0$

· Todas las soluciones entran/salen con la pendiente del vector propio

· EN EL SISTEMA COMPLETO:

- SE MANTIENE LA ESTABILIDAD
- PUEDE SER:
  - Nodo degenerado
  - Foco
  - Nodo

RESUMEN



$tr\,A^2 = 4|A|$
"NODO" ESTABLE
"NODO" INESTABLE
$|A|$
CENTRO
?
FOCO ASINTÓTICAMENTE ESTABLE
FOCO INESTABLE
NODO INESTABLE
NODO ASINTÓTICAMENTE ESTABLE
$tr\,A$
PUNTO DE SILLA / PUERTO INESTABLE

DIAGRAMAS DE FASES

- LAS SOLUCIONES NUNCA SE CORTAN (salvo quizás en ptos. críticos)

1º- Puntos fijos y estabilidad: salvo centros / nodos raros, en el entorno el gráfico será como el de la aproximación lineal

2º- Buscar soluciones particulares: ayudan mucho porque < no se pueden cruzar / te dan una idea de cómo es el diagrama

Métodos:

- Anular con $y = cte.$ $\dot{y}$ pero no $\dot{x}$: queda $\dot{x} = f(x)$, soluble
- Anular con $x = cte.$ $\dot{x}$ pero no $\dot{y}$
- $y = x$
- $y = -x$
- Integrales primeras: $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{dy}{dx} \rightarrow$ Se obtiene una EDO de 1ª orden.

  En general si se resuelve dan muchísima información: pues son todo lo que hay que pintar y ayudan cuando hay dudas. (1.9: si existe solución pasa por cierto punto)

  La solución será del tipo $\varphi(x, y) = C$. Casos especiales de la C (como 0), empezar soluciones
- Una vez pintado el diagrama, líneas que parecen no cruzarse nunca (vemos 26)

3º- Se mira dónde se anula $\dot{x}$ o $\dot{y}$ $\Rightarrow$ UTILÍSIMO (dejo de bajar para subir / dejo de ir a la izda para ir a la dcha)

Las líneas se cortarán a los puntos críticos

4º- Se pintan las soluciones que pasan por los puntos críticos cuidado (3). El resto salen, en general, por similitud con éstas y (3)

Si empiezo muy cerca, me mantendré muy cerca

- $\boxed{\text{POR TODO PUNTO PASA UNA SOLUCIÓN}}$. De todas formas, no pintar demasiadas rayas iguales (queda sucio)

- LAS SIMETRÍAS AYUDAN MUCHÍSIMO

- <u>Centros</u>: - Integral 1ª: así sé si a cierto eje que pasa por el pto crítico corta un nº finito (centro) o infinito (foco) de veces

  - Simetría: <u>los focos no son simétricos</u>

  - A veces el hecho de cortarse, pasar por $\dot{x}=0/\dot{y}=0$... puede ayudar a discernir

- <u>Nodos feos</u>: - Para discernir si es o no es un foco:
  - Simetría
  - Líneas de $\dot{x}=0/\dot{y}=0$
  - Cortarse

  - No hay método de discernir entre nodos feos y nodos como Dios manda: se pinta uno de ellos y listo

- Conviene <u>factorizar los polinomios</u> (se hace a ojo, viendo si con $y=x$ / $x=$ cte. / $y=$ cte... se anulan)
- Si estamos muy desesperados, sacamos vectores tangentes: (p, q)
- Pensar siempre que <u>todas las soluciones tienen que venir de alguna parte / ir a alguna parte</u>
- A veces ayuda pensar hacia dónde irán las líneas que vienen del infinito
- <u>Si no sé qué va a hacer una solución</u>, pinto el resto del diagrama y <u>aplico que no se pueden cruzar.</u>
- Importante comparar el valor absoluto de la pendiente de los ptos. críticos con las curvas $\dot{x}=0/\dot{y}=0$ derivando

  máx. abs.

POTENCIALES

· Son sistemas del tipo:

$$\boxed{\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = f(x) \end{cases}} \iff \boxed{\ddot{x} = f(x)}$$

Mejor este criterio (por si aparece $\dot{x} = 3^2 y$)

. Definimos $\boxed{V(x) \equiv - \int f(x)dx}$

ojo!

· $E = \frac{1}{2} y^2 + V(x) = \frac{1}{2} \dot{x}^2 + V(x)$ es cte.

1º- Se pinta $V(x)$. Me interesan:

- Máximos $\Rightarrow$ PUNTOS DE SILLA
- Mínimos $\Rightarrow$ CENTROS

} Los únicos ptos críticos (pues ahí $V' = 0 \iff f = 0$)

- Qué le pasa en $\pm \infty$

2º- Pintar soluciones para diferentes valores de E. Se sabe que:

- $V \leq E \Rightarrow$ Sé por qué valores de x se mueve mi solución
- $y = 0 \iff V = E \Rightarrow$ Sé dónde corto al eje OX
- $E - V$ es una medida de y (salvo un cuadrado)

· La idea es ver lo que le pasaría a una canica que se mueve por la curva $V(x)$ y dibujar su velocidad frente a su posición

· Hay que pintar las soluciones representativas (cuando la canica pasa por máximos/mínimos...), aunque siempre queda pobre (pintar varias de cada tipo)

cualitativamente diferentes

· Hay simetría OX

· Encima del eje OX, flechas a la dcha. Debajo, a la izda (pues $y = \dot{x}$)

· Se pinta de menor a más energía para evitar apelotonamientos

· Dicho mal y pronto, es coger la parte de la curva $V(x)$ por debajo de E y pintarla dada la vuelta

· Hay que alinear máximos/mínimos de las órbitas con los puntos fijos.