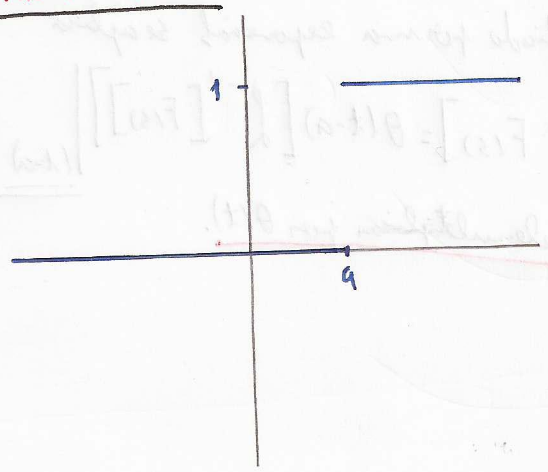
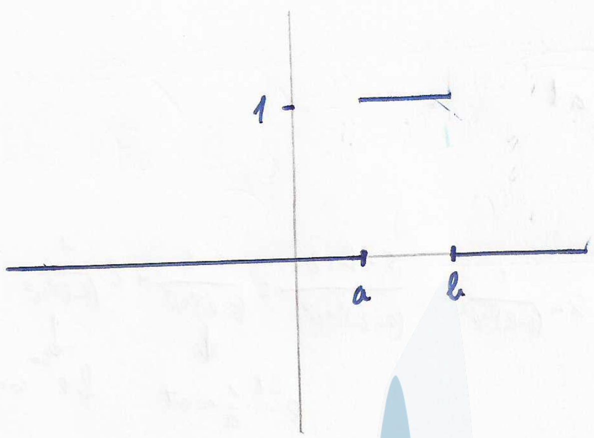
TRANSFORMAR



$\theta(t-a)$



$\theta(t-a)-\theta(t-b)$

- 1º - Poner término inhomogéneo en función de θ
- Ojo con $\underline{\theta(t-a)}\, f\underline{(t-a)}$:
  - $\theta(t-a)\,\text{sen}\, t = \theta(t-a)\,\text{sen}(t-a+a) = \theta(t-a)\,\text{sen}(t-a)\cos \underset{=\,\text{cte.}}{a} + \theta(t-a)\cos(t-a)\,\text{sen}\,\underset{=\,\text{cte.}}{a} \Rightarrow$ Ahora sí puedo transformar (mismo con cos)
  - $\theta(t-a)t^2 = \theta(t-a)(t-a+a)^2 = \theta(t-a)\left[(t-a)^2+2a(t-a)+a^2\right] = \theta(t-a)(t-a)^2 + 2a\,\theta(t-a)(t-a) + a^2\,\theta(t-a) \Rightarrow$ Ahora sí puedo transformar (vale para cualquier t^n)
- Si la C.I. está dada en $t = t_0 \neq 0$, se hace el cambio $\hat{t} = t - t_0$ (ver ej. 24)

CUENTAS

- $ax^2 + bx + c = a(x-\alpha)(x-\beta)$, con $b = -(\alpha+\beta)$, $c = \alpha\cdot\beta$
- En sistemas, a la hora de sacar la 2ª incógnita, todos los números deben irse (no se pueden antitransformar)
- Fracciones simples: $F(s) = \dfrac{A_m}{(s-a)^m} + \dfrac{A_{m-1}}{(s-a)^{m-1}} + \dots + \dfrac{A_1}{s-a} + G(s)$ → Corresponde a las otras raíces

$$\boxed{A_m = \lim_{s\to a} (s-a)^m F(s)}$$

→ En general este término sale más fácilmente y el resto haciendo un sistema

$$A_{m-1} = \lim_{s\to a} \frac{d}{ds}\left[(s-a)^m F(s)\right]$$

$$A_1 = \lim_{s\to a} \frac{d^{m-1}}{ds^{m-1}}\left[(s-a)^m F(s)\right]$$

ANTETRANSFORMAR

- Sabemos transformar funciones racionales (si está multiplicado por una exponencial se aplica
$$\mathcal{L}^{-1}\left[e^{-as} F(s)\right] = \theta(t-a)\left[\mathcal{L}^{-1}[F(s)]\right]\Big|_{(t-a)}$$)

- Si no tiene θ delante después de antetransformar, se suele multiplicar por $\theta(t)$.

- Como $\mathcal{L}^{-1}[F(s-a)] = e^{at}\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$:

  - $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-a}\right] = \theta(t) e^{at}$

  - $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-a)^n}\right] = \theta(t)\cdot\frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{at}$

  - $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+a^2}\right] = \frac{1}{a} \operatorname{sen} at \rightarrow \underline{\underline{\text{OJO!}}}$ Si es $\frac{s}{(s-b)^2+a^2} = \frac{s-b+b}{(s-b)^2+a^2} = \underbrace{\frac{s-b}{(s-b)^2+a^2}}_{e^{bt}\frac{1}{a}\operatorname{sen} at} + b\cdot\underbrace{\frac{1}{(s-b)^2+a^2}}_{b e^{bt}\cos at}$

  - $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+a^2}\right] = \cos at$ $\qquad \mathcal{L}[\cos at]$

  - $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s^2+a^2)^2}\right] = \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2s}{(s^2+a^2)^2}\right] = \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2+a^2}\right)\right]$, y se aplica

$$\mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}\mathcal{L}[f(t)] \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{d^n}{ds^n}\mathcal{L}(f(t))\right] = (-1)^n t^n f(t)$$

  - $\frac{2a^2}{(s^2+a^2)^2} = \frac{1}{s^2+a^2} + \frac{a^2-s^2}{(s^2+a^2)^2} = \frac{1}{s^2+a^2} + \frac{d}{ds}\left(\frac{s}{s^2+1}\right)$, y se aplica ↑

TRANSFORMADAS (la linealidad ayuda muchísimo)

$$\mathcal{L}[\theta(t-a)] = \frac{e^{-as}}{s} \quad \left(\Rightarrow \mathcal{L}[\theta(t)] = \frac{1}{s}\right)$$

$$\mathcal{L}[e^{at}] = \frac{1}{s-a} \quad \forall s>a$$

$$\mathcal{L}[\cos(at)] = \frac{s}{s^2+a^2} \quad \forall s>0$$

$$\mathcal{L}[\operatorname{sen}(at)] = \frac{a}{s^2+a^2} \quad \forall s>0$$

$$\mathcal{L}[\operatorname{senh}(at)] = \frac{a}{s^2-a^2} \quad \forall s>|a|$$

$$\mathcal{L}[\cosh(at)] = \frac{s}{s^2-a^2} \quad \forall s>|a|$$

$$\mathcal{L}[e^{at} f(t)] = \mathcal{L}[f(t)]\Big|_{s-a}$$

$$\mathcal{L}[\theta(t-a) f(t-a)] = e^{-as}\mathcal{L}[f(t)]$$

$$\mathcal{L}[f^{n)}(t)] = s^n \mathcal{L}[f(t)] - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - s f^{n-2)}(0) - f^{n-1)}(0)$$

$$\mathcal{L}[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}} \quad \forall s>0 \quad \left(\Rightarrow \mathcal{L}[t] = \frac{1}{s^2}\right)$$

$$\mathcal{L}[t e^{at}] = \frac{1}{(s-a)^2} \quad \forall s>a$$

$$\mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)^n \mathcal{L}[f(t)]^{n)}$$

TRANSFORMADAS INVERSAS

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-a}\right]=e^{at} \; ; \; \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+a^2}\right]=\frac{1}{a}\operatorname{sen}(at) \; ; \; \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-a)^n}\right]=\frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}e^{at}$$

$$\left(\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right]=t\right)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[F(s-a)\right]=e^{at}\,\mathcal{L}^{-1}\left[F(s)\right]$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[e^{-as}F(s)\right]=\theta(t-a)\left[\mathcal{L}^{-1}\left[F(s)\right]\right]\Big|_{t-a}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+a^2}\right]=\cos(at)$$