PROBABILIDAD

INTRODUCCIÓN INTUITIVA

· La idea intuitiva es la siguiente: realizamos una experiencia N veces, de las cuales N_A ocurre el suceso A. Entonces, $\boxed{\lim_{N\to+\infty} \frac{N_A}{N} = P(A)}$

Se suele usar otra definición (equivalente) que permite hacer predicciones: se dividen todos los sucesos posibles en un número de sucesos equiprobables y:

$$\boxed{P(A) = \frac{n^\circ \text{ de sucesos favorables}}{n^\circ \text{ de sucesos posibles}}}$$

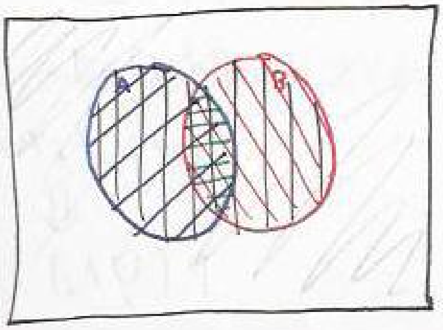
· De estas definiciones deducimos:

- $P \in \mathbb{R}$. Es más, $P \in [0,1]$
- $P = 1 \Leftrightarrow$ Certeza
- $P = 0 \Leftrightarrow$ Imposibilidad
- Si llamamos $\overline{A}$ al suceso "no ocurre A", $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ (pues $N_{\overline{A}} + N_A = N$)

· Esto último nos da la idea de definir nuevos sucesos:

- Ocurren A y B $\equiv A \cap B$
- Ocurre $\underbrace{A \text{ o } B}_{\text{no excluyente}} \equiv A \cup B$

Y haciendo una analogía entre el número de veces que ocurre algo y un área, esto se visualiza muy bien con diagramas de Venn:



N_A

N_B

$N_{A\cap B}$

$N_{A\cup B}$

N

→ Se deduce inmediatamente propiedades como $N_{A\cup B} = N_A + N_B - N_{A\cap B}$

FORMULACIÓN RIGUROSA

· Sea β un conjunto al que pertenecen, al menos, U y $\emptyset$. Sobre β están definidas las operaciones $\cap$ y $\cup$. Esto es un álgebra de Boole si se cumple:

IDENTIDAD: $A \cup \emptyset = A$

$A \cap U = A$

CONMUTATIVA: a ambas operaciones

$A \cap B = B \cap A$

$A \cup B = B \cup A$

ASOCIATIVA: a ambas operaciones

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

DISTRIBUTIVA: a ambas combinaciones

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

COMPLETITUD:

$\exists \overline{A}$ tq $A \cup \overline{A} = U$

$A \cap \overline{A} = \emptyset$

Es el álgebra de la teoría de conjuntos (con $\beta = U$)

· Definimos la probabilidad como la siguiente aplicación de un álgebra de Boole a $\mathbb{R}$:

$$P: U \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$A \longrightarrow P(A)$$

que cumple:

· $P(A) \geq 0$

· $P(U) = 1$

· $\forall i \neq j \quad A_i \cap A_j = \emptyset$

$$\Downarrow$$

$$P\left(\bigcup_i A_i\right) = \sum_i P(A_i)$$

· De los axiomas se deducen una serie de propiedades:

· $P(\emptyset)=0$

· $P(A)\in[0,1]$

· $P(\overline{A})=1-P(A)$ → A veces es más fácil calcular $P(\overline{A})$

· $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$

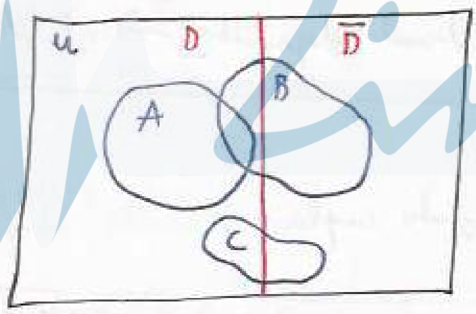
· $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

· $$P\left(\bigcup_i A_i\right)=\sum_i P(A_i)-\sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}}P(A_i\cap A_j)+\sum_{\substack{i,j,k\\ i\neq j\\ i\neq k\\ j\neq k}}P(A_i\cap A_j\cap A_k)-\dots$$

Se acaba de sumar al intersecar todos los $\{A_i\}$ entre sí

APROXIMACIÓN PRÁCTICA

· En la práctica, lo más útil es representar los sucesos en un diagrama de Venn:



· A y C son excluyentes: o ocurre o bien A o bien C o bien ninguno

· D y $\overline{D}$ son excluyentes y además $D\cup\overline{D}=U$

· ...

La probabilidad de un suceso es su área (tomando área de $U=1$)

Utilísimo, si $\{C_i\}$ son excluyentes y $\bigcup_i C_i=U$: $A=(A\cap C_1)\cup(A\cap C_2)\cup\dots$ suele ser más fácil hallarlas

· Así, los datos de un problema nos dan ciertas áreas, nos dividen todo U en diferentes regiones...

y el problema de hallar probabilidades se reduce al de hallar áreas (sumando, restando...)

· Todos los procesos, evidentemente, se podrán luego probar rigurosamente mediante las propiedades del álgebra de Boole y los axiomas de la probabilidad.

PROBABILIDAD CONDICIONADA (Puede ayudar a la hora de calcular $P(A \cap B)$)

· $\boxed{P(A|B) \equiv \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}}$: es, sabiendo que ha ocurrido B, la probabilidad de que además, ocurra A: modeliza el hecho de que un suceso influye a la probabilidad de que ocurra otro

· Deducción: (Para simplificar y entenderlo, n y n' para verlo mejor)
· B ha ocurrido n veces
· (A y B) ha ocurrido n' veces
$\Longrightarrow$ Por cada $\dfrac{n}{n'}$ veces que ocurre B, una ocurrió A

$\Downarrow$

Sabiendo que ha ocurrido B, la probabilidad de que haya ocurrido A es $\dfrac{1}{n/n'} = \dfrac{n'}{n}$ (sucesos favorables / Total de sucesos)

· Teorema de Bayes: $\boxed{P(A|B) = P(B|A)\dfrac{P(A)}{P(B)}}$ (Se halla despejando $P(A \cap B)$ de $P(A|B)$ y $P(B|A)$ e igualando)

· Esto nos permite definir:

$\boxed{\text{A y B se dicen estadísticamente independientes} \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} P(A|B) = P(A)}$ → El hecho de que ocurra B no influye a la probabilidad de que ocurra A

Los sucesos estadísticamente independientes cumplen: (Sustituimos $P(A|B)$ por su definición)

$\boxed{\text{A y B estadísticamente independientes} \Longleftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)}$

VARIABLES ALEATORIAS

· Hasta ahora hemos trabajado con conjuntos, que se visualiza muy bien pero no nos permiten obtener resultados cuantitativos como medias, desviaciones...

· Por esa razón, definimos una variable aleatoria como una aplicación:

$$\boxed{\begin{aligned} \xi: U &\longrightarrow \mathbb{R} \\ A &\longrightarrow \xi(A) = X \end{aligned}}$$

A cada suceso le asociamos un número

· Convenios:

· Por lo general, ξ sólo se define para sucesos elementales (sucesos cuya intersección es vacía y cuya unión forma U)

· Se suele emplear el término variable aleatoria para el conjunto imagen.

Así, decir que X es una variable aleatoria equivale a decir que

$$\exists \underbrace{A}_{\text{elemental}} \in U \text{ tq } \xi(A) = X$$

· Vamos ya a trabajar con variables aleatorias

VARIABLE DISCRETA: es aquella a la que el conjunto imagen es contable (puede ser infinito)

· definimos la probabilidad de la variable discreta de manera obvia:

$$\boxed{p(x) = \begin{cases} P(A) & \text{si } \exists A \text{ tq } x = \xi(A) \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}}$$

· nótese que $\boxed{\sum_i p(x_i) = 1}$ (pues $\bigcup A_i = U$; y $A_i \cap A_j = \emptyset \ \forall i \neq j$)

· se define la función de probabilidad acumulada:

$$\boxed{P(x_e) = \sum_{x \leq x_e} p(x)}$$ → la probabilidad de que ocurra algo hasta x_e

$$\boxed{P(x_a \leq x \leq x_e) = \sum_{x_a \leq x \leq x_e} p(x)}$$

VARIABLE CONTINUA: · Cuando el conjunto imagen es un intervalo continuo

· Ahora es más difícil asignar probabilidades: el paso a $\mathbb{R}$ requiere tomar límites, hacer las cosas pequeñas, y en ese proceso la probabilidad de un suceso va a tender a 0

· Por tanto, sólo podemos definir probabilidades acumuladas: tomamos un conjunto continuo de sucesos, y a la vez que hacemos las cosas pequeñas, sumamos $\Rightarrow$ INTEGRAMOS

→ la probabilidad de que ocurra algo hasta x

$$\boxed{P(x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)\,dt}$$, siendo

$$p(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(\xi^{-1}[(t, t+\Delta t)])}{\Delta t}$$

$\Downarrow$

Hallo la probabilidad de que ocurra el evento entre t y $t+\Delta t$ (a una región determinada en concreto) y divido entre Δt

Se llama distribución de probabilidad

Es decir, $p(t)\,dt$ nos dice la probabilidad de que ocurra algo entre t y $t+dt$ ($P'(x) = p(x)$)

Consecuentes, · $P(x_a \leq x \leq x_b) = \int_{x_a}^{x_b} p(t)\,dt$

· $\int_{-\infty}^{+\infty} p(t)\,dt = 1$

LAS VARIABLES DISCRETAS SE HACEN CONTINUAS CON DELTAS DE DIRAC:

$$p(x) = \sum_i p(x_i)\,\delta(x - x_i)$$

· Por último, es lógico extender la operación $A \wedge B$:

Sean x e y dos variables aleatorias de probabilidad p_1 y p_2, respectivamente.

La probabilidad de que ocurran ambas se denota por $p(x,y)$

Si x e y son independientes, $p(x,y) = p_1(x)\,p_2(y)$

PROPIEDADES DE DISTRIBUCIONES

· VALOR MEDIO $\boxed{\mu = \langle x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, p(x)\, dx = \sum_i x_i\, p(x_i)}$

· Supongamos que he obtenido la siguiente lista de números:

1
1
2
3
5
5
4

· Hay N números

· Cada uno aparece N_i veces

El promedio se halla de manera sencilla: $\frac{1+1+2+3+4+5+5}{N} =$

$$= \frac{1\cdot N_1 + 2\cdot N_2 + 3\cdot N_3 + 4\cdot N_4 + 5\cdot N_5}{N} =$$

$$= 1\cdot \overset{=p(1)}{\frac{N_1}{N}} + 2\cdot \overset{=p(2)}{\frac{N_2}{N}} + 3\cdot \overset{=p(3)}{\frac{N_3}{N}} + 4\cdot \overset{=p(4)}{\frac{N_4}{N}} + 5\cdot \overset{=p(5)}{\frac{N_5}{N}} =$$

$= \sum_i x_i\, p(x_i)$, donde se suma a todo el conjunto imagen

En el caso continuo, $p(x_i)$ se sustituye por $\underbrace{p(x_i)\,\Delta x_i}_{\text{la probabilidad de que x esté entre } x_i \text{ y } x_i+\Delta x}$, y al tomar $\Delta x_i \to 0$ queda una integral.

· VALOR DE EXPECTACIÓN de f(x) $\boxed{E[f(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, p(x)\, dx = \sum_i f(x_i)\, p(x_i)}$

· Sea la lista de números de antes. A cada número le asocio otro (p.ej., si es la nota de un parcial, le asocio la parte de la nota final que le corresponde)

Lo que ha salido

$1 \to f(1)$
$1 \to f(1)$
$2 \to f(2)$
$3 \to f(3)$
$5 \to f(5)$
$5 \to f(5)$
$4 \to f(4)$

Los que han sacado un 1, aunque yo quiero el resultado de f

El promedio es fácil: $\frac{f(1)\cdot N_1 + f(2)N_2 + f(3)N_3 + f(4)N_4 + f(5)N_5}{N} =$

$= \sum_i f(x_i)\, p(x_i)$, como antes

· MEDIANA $\boxed{x_{50} \text{ es aquel valor para el que } P(x_{50}) = \frac{1}{2} = \int_{-\infty}^{x_{50}} f(t)\,dt}$

· Es el valor que la probabilidad de que ocurra algo hasta él es 1/2

· MODA $\boxed{\text{Los valores de } x \text{ para los que la distribución tiene un máximo}}$

· Es el valor más probable

· VARIANZA $\boxed{V = E[(x-\mu)^2]}$

· Es lo que, en promedio, se va a alejar x de la media. Se eleva al cuadrado para evitar que los diferentes signos se compensen

· DESVIACIÓN ESTÁNDAR $\boxed{\sigma = \sqrt{V}}$

· V nos da lo que en promedio, es la distancia de x a μ elevada al cuadrado. Como nos interesa la distancia, se toma la raíz

· QUARTILES Y N-PERCENTILES

Quartil superior x_{75}: $P(x_{75}) = \frac{3}{4}$

Quartil inferior x_{25}: $P(x_{25}) = \frac{1}{4}$

n-percentil: x_n: $P(x_n) = \frac{n}{100}$

Nos dan idea de la anchura de la distribución

· MOMENTOS Generalizan todo lo visto hasta ahora

$$\mu_k = E[x^k]$$

μ_1 es el promedio

$$\nu_k = E[(x-\mu)^k]$$

momentos centrales

ν_2 es la varianza

$$\gamma_k = \frac{\nu_k}{\sigma^k}$$

skew (sesgo)

$\gamma_3 \equiv \gamma_S$ nos dice si hay más peso a la izquierda ($\gamma_3 < 0$) o a la derecha ($\gamma_3 > 0$)

γ_4 cuanto mayor sea, más picuda es la distribución

Cumplen una serie de propiedades:

- Si a es una constante, $E[a] = a$ (pues $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$)
- $E[\alpha f + \beta g] = \alpha E[f] + \beta E[g] \Rightarrow$ Es lineal
- $\boxed{V = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$
- La probabilidad de que $|x-\mu| \geq C$ es, $\forall C \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{p(|x-\mu| \geq c) \leq \frac{\sigma^2}{c^2}}$$

En particular, $p(|x-\mu| \geq n\sigma) \leq \frac{1}{n^2}$: la probabilidad de que x se aleje de la media $n\sigma$ (en valor absoluto, claro) o más es siempre menor que $\frac{1}{n^2}$.

- Por último, nos podemos preguntar por la distribución de probabilidad de $y = f(x)$ (p.ej., conocemos la probabilidad de medir cierto momento lineal, pero nos permitiría saber la energía promedio; aunque preferimos saber la probabilidad de medir cierta energía)

$$\boxed{p_y(y) = p_x(x(y)) \cdot \left.\frac{dx}{dy}\right|_{x(y)}}$$

DISTRIBUCIONES COMUNES

BINOMIAL ⇓ DISCRETA

· Sea un experimento con dos posibles resultados, el favorable (de probabilidad p) y el desfavorable (de probabilidad $1-p$)

· Si repetimos el experimento un número n de veces, ¿cuál es la probabilidad de que salgan K resultados favorables?

$$\boxed{p(k) = \binom{n}{k} p^{k} (1-p)^{n-k}} \quad ; \text{Aquí} \quad \boxed{\begin{array}{l} \mu = np \\ \sigma = \sqrt{np(1-p)} \end{array}}$$

La variable aleatoria asigna a cada suceso (cada conjunto de n tiradas) el número de resultados favorables

Demostración:

· Quiero la probabilidad de que salga cierto resultado con K favorables y $n-k$ desfavorables. Como son sucesos independientes (cada repetición no influye a la anterior), para cada resultado esto vale $\underbrace{p^{k}(1-p)^{n-k}}$ (probabilidad de que salgan K favorables)

· Ahora, $p(k)$ es la probabilidad de que salga alguno de esos resultados. Esto es una unión de sucesos disjuntos (no pueden darse a la vez), así que tengo que sumar la probabilidad para cada uno de los $\binom{n}{k}$ sucesos que me valen (el orden en el que sale no importa). Como son equiprobables, $p(k) = \binom{n}{k} p^{k} (1-p)^{n-k}$

DISTRIBUCIÓN DE POISSON ⇓ DISCRETA para muchas medidas

· Cogemos la binomial y tomamos: μ cte. $= \lambda$, $n \to +\infty$ $(\Rightarrow p \to 0)$

$$\boxed{p(k) = \frac{1}{k!} \lambda^{k} e^{-\lambda}} \quad ; \text{aquí} \quad \boxed{\begin{array}{l} \mu = \lambda \\ \sigma = \sqrt{\lambda} \end{array}}$$

· Ejemplo: un detector compuesto por trozos de cierta anchura es una binomial. Ahora, si hago los trozos cada vez más pequeños, $n \to +\infty$ pero el promedio de fotones detectados se mantiene cte. Así, la probabilidad de detectar K fotones no la da la distribución de Poisson por lo que se dice que la probabilidad de que un trozo detecte un fotón $\to 0$

· DISTRIBUCIÓN GAUSSIANA O NORMAL

Es una distribución continua, buena aproximación de la binomial si $n \to +\infty$ (de hecho, para pequeños como 10 ya es razonable)

$$\boxed{p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}} \qquad \boxed{\begin{matrix}\mu = \bar{x} \\ \sigma = \sigma\end{matrix}}$$

· Para λ altos ($\sim 10, 15$), aproxima muy bien a la de Poisson: $P_{Poisson}(k) = \int_{k-1/2}^{k+1/2} N(\mu=\lambda, \sigma=\sqrt{\lambda})\,dx$

· Su utilidad radica en:

TEOREMA CENTRAL DEL LÍMITE : sea X una variable aleatoria, de media μ y desviación estándar σ. Nos preguntamos por la distribución de probabilidad de $a = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$, $p(a) \Rightarrow$ ¿Cuál es la distribución de probabilidad del valor medio de x? $\Leftrightarrow$ ¿Cuál es la probabilidad de que el valor medio experimental esté entre a y $a+da$?

$$\text{Según } n \to +\infty,\ \underbrace{\boxed{p(a) \to \frac{1}{\sigma_a\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(a-\mu)^2}{2\sigma_a^2}}}}_{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(a-\mu)^2}{2\sigma^2}}} ;\ \boxed{\sigma_a = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

$\Rightarrow$ La distribución del valor medio experimental es una Gaussiana centrada en μ y de anchura σ_a

· Si $n \to +\infty$, la anchura $\to 0$

SUMA DE POISSON/GAUSS

· $\begin{matrix} p(k_1) = P(\lambda_1) \\ p(k_2) = P(\lambda_2) \end{matrix} \Rightarrow p(k_1 + k_2) = P(\lambda_1 + \lambda_2) = \frac{1}{(k_1+k_2)!} e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} (\lambda_1+\lambda_2)^{k_1+k_2}$ → P. ej., si tengo dos emisores de fotones y un detector

· $\begin{matrix} p(x_1) = N(\mu_1, \sigma_1) \\ p(x_2) = N(\mu_2, \sigma_2) \end{matrix} \Rightarrow p(x_1 + x_2) = N(\mu_1 + \mu_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2})$

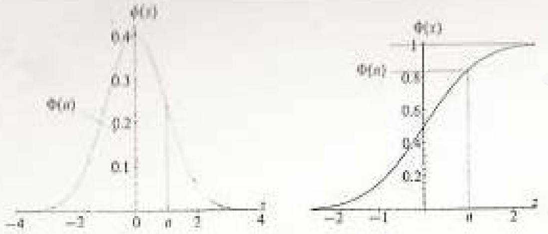


Figure 26.14 On the left, the standard Gaussian distribution $\phi(z)$; the shaded area gives $\Pr(Z < a) = \Phi(a)$. On the right, the cumulative probability function $\Phi(z)$ for a standard Gaussian distribution $\phi(z)$.

From (26.105) we can define the cumulative probability function for a Gaussian distribution as

$$F(x) = \Pr(X < x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{u-\mu}{\sigma}\right)^2\right] du, \tag{26.107}$$

where u is a (dummy) integration variable. Unfortunately, this (indefinite) integral cannot be evaluated analytically. It is therefore standard practice to tabulate values of the cumulative probability function for the standard Gaussian distribution (see figure 26.14), i.e.

$$\Phi(z) = \Pr(Z < z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du. \tag{26.108}$$

It is usual only to tabulate $\Phi(z)$ for $z > 0$, since it can be seen easily, from figure 26.14 and the symmetry of the Gaussian distribution, that $\boxed{\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)}$; see table 26.3. Using such a table it is then straightforward to evaluate the probability that Z lies in a given range of z-values. For example, for a and b constant,

$$\left.\begin{aligned} \Pr(Z < a) &= \Phi(a), \\ \Pr(Z > a) &= 1 - \Phi(a), \\ \Pr(a < Z \le b) &= \Phi(b) - \Phi(a). \end{aligned}\right\}$$

$\Rightarrow \boxed{\phi^{-1}(x) = -\phi^{-1}(1-x)}$

$\phi(z) = x$

$z = \phi^{-1}(x)$ $\Rightarrow$ sustituimos ϕ^{-1} y ...

$-z = \phi^{-1}(1-\phi(z))$

$-\phi^{-1}(x) = \phi^{-1}(1-x)$

Remembering that $Z = (X - \mu)/\sigma$ and comparing (26.107) and (26.108), we see that

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right),$$

and so we may also calculate the probability that the original random variable

$\Phi(z)$	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998

Table 26.3 The cumulative probability function $\Phi(z)$ for the standard Gaussian distribution, as given by (26.108). The units and the first decimal place of z are specified in the column under $\Phi(z)$ and the second decimal place is specified by the column headings. Thus, for example, $\Phi(1.23) = 0.8907$.

Esto tabula $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \phi(z)$

Si queremos $\psi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \left| \begin{aligned} \frac{x-\mu}{\sigma} &= t \\ \frac{dx}{\sigma} &= dt \end{aligned} \right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{z-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

$\psi(z) = \phi\left(\frac{z-\mu}{\sigma}\right)$

FUNCIÓN CARACTERÍSTICA / GENERATRIZ DE UNA DISTRIBUCIÓN

· Es su transformada de Fourier: $p(x) \longrightarrow \Phi(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{ikx}\, p(x)$

· Al desarrollar en Taylor la exponencial, aparecen los momentos $\Rightarrow$ $\boxed{\left.\frac{d^n \Phi}{dk^n}\right|_{k=0} \propto \mu_n}$

· Es decir, una distribución queda caracterizada por sus momentos.

· Esto vale para demostrar T.C.L.