MÉTODO DE LAS CARACTERÍSTICAS

1er ORDEN

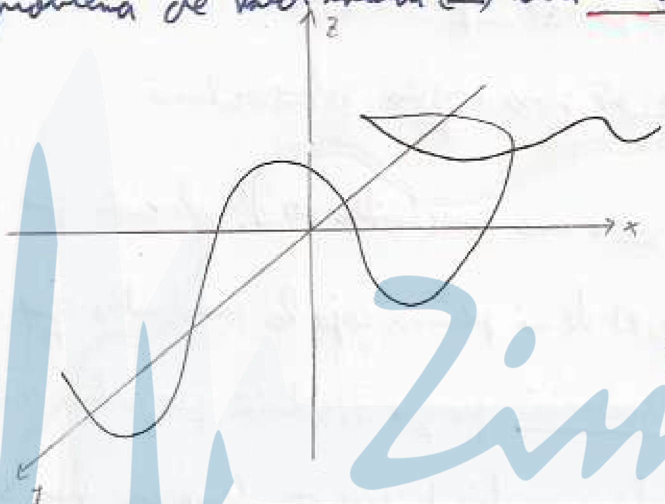
- Sea una EDP de primer orden:

$$F(x, y, z, z_x, z_y) = 0$$

la solución a esto es una superficie: → Tiene esto ciego a esto

$$\phi(x, y, z) = 0$$

- Consideremos un problema de valor inicial $\iff$ una curva dato: $\gamma(t) \equiv \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$



γ ⇓ si conozco la solución sobre γ ¿puedo conocer la solución sobre todo $\mathbb{R}^3$?

- Igual que en EDO, se hace un desarrollo en serie de Taylor. Denotando $p = z_x$ y $q = z_y$, resulta que $\exists!$ solución si y sólo si γ NO cumple: (Ecuación PUNTUAL)

$$\frac{dz}{pF_p + qF_q} = \frac{dx}{F_p} = \frac{dy}{F_q} = \frac{-dp}{F_x + pF_z} = \frac{-dq}{F_y + qF_z}$$

($p(t)$ y $q(t)$ se hallan derivando con la regla de la cadena)

Las curvas que cumplen esto se llaman curvas características $\underbrace{\text{(viven en } \mathbb{R}^5)}_{\text{En general, esto no complica mucho el problema}}$. Tienen una interesante propiedad:

(la de dif. de aparecer z_x y z_y) → No es tangente, CORTA

- Yo seré capaz de construir mi solución $\iff$ en cada punto, mi curva inicial corta a una curva característica. De alguna manera, el hecho de cortar a una característica me ayuda a extender la información de mi curva a todo el espacio. Se podría decir, entonces, que las curvas características transportan información (es celeridad especial, de hecho, son rayos de luz)

EDP CUASILINEALES

$$A(x,y,z)z_x + B(x,y,z)z_y = C(x,y,z)$$

. En este caso, las ecuaciones características nos las da el sistema de EDOs:

$$\boxed{\frac{dz}{C} = \frac{dx}{A} = \frac{dy}{B}}$$ (Igualmente válido si hay más de dos variables independientes)

. Así, las características ahora viven en $\mathbb{R}^3$ (serán una familia biparamétrica de curvas). Cada característica cumple (pues si se toman de C.I. $\exists!$ solución):

↳ Pasan por cualquier (x,y,z) por T.E.U. de EDOs

1- O bien está contenida en varias soluciones

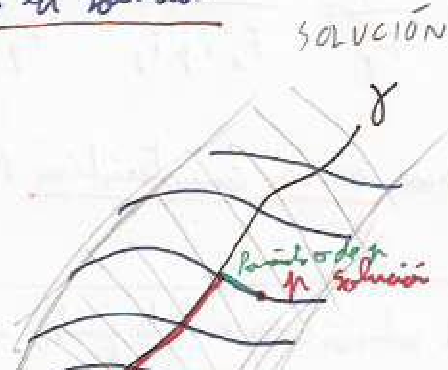
2- O bien no toca ni siquiera a una solución

. Sea γ mi curva inicial que no es una característica $\Rightarrow \exists!$ solución que la contiene.

Por tanto, para cada (x,y,z) de mi curva cojo la característica que pasa por ahí. Esa característica está contenida en alguna solución porque $\exists$ solución que contiene a mi curva.

Con esto, si la característica está parametrizada por σ, tengo un par de parámetros (t,σ),

tengo $\begin{cases} x = x(t,\sigma) \\ y = y(t,\sigma) \\ z = z(t,\sigma) \end{cases}$ todos contenidos en alguna solución $\Longrightarrow$ Tengo una superficie contenida en alguna solución $\underset{\exists!\text{ solución}}{\Longrightarrow}$ Tengo la solución



Curvas características (pasan por cada punto)

⇓

Aquí se ve muy bien que se Transporta información, generándose la solución a partir de la curva inicial

Ejemplo:

$$y z\, z_x + z_y = 0$$

Además, la superficie solución debe contener a la curva: $\gamma \equiv \begin{cases} x=0 \\ z=y^3 \end{cases} \iff \begin{cases} x=0 \\ y=t \\ z=t^3 \end{cases}$

Las curvas características son solución de:

$$\frac{dx}{yz} = \frac{dy}{1} = \frac{dz}{0}$$

↳ Esto es simbólico, significa $dz=0$

Hay dos maneras de solucionar esto:

1- Se iguala todo a $d\sigma$ (Mi parámetro). Tengo 3 ecuaciones:

$$\begin{cases} dz = 0 \iff z = C_1 \\ dy = d\sigma \iff y = C_2 + \sigma \\ dx = yz\,d\sigma \;; \int dx = \int C_1 \cdot (C_2+\sigma)\,d\sigma \;;\; x = C_1 C_2 \sigma + \frac{1}{2} C_1 \sigma^2 + C_3 \end{cases}$$

Aunque hay 3 parámetros, la familia es biparamétrica: el tercer parámetro es el origen de σ (pues el sistema es autónomo):

$$\begin{cases} x(\sigma) = \frac{1}{2} C_1 \sigma^2 + C_1 C_2 \sigma + C_3 \\ y(\sigma) = \sigma + C_2 \\ z(\sigma) = C_1 \end{cases}$$

⇒ Mi curva no es una característica, no debe ser

Como tengo libertad para elegir el origen de σ, lo escojo 0 en mi curva inicial. Igualo y resuelvo para obtener el valor de las ctes. en función de t y así conocer mi superficie solución:

= Los puntos de corte de la curva y las características arrojan el mismo resultado

$$\begin{cases} x(t, \sigma=0) = 0 = C_3 + \cancel{C_2 C_1 \cdot 0} + \cancel{\tfrac{1}{2} C_1 \cdot 0} = 0 \Rightarrow C_3 = 0 \\ y(t, \sigma=0) = t = 0 + C_2 \Rightarrow C_2 = t \\ z(t, \sigma=0) = t^3 = C_1 \Rightarrow C_1 = t^3 \end{cases}$$

Así, para cada t de mi curva inicial, he cogido el conjunto (C_1, C_2, C_3) que me da la curva característica que pasa por ahí. La unión de todas las posibles curvas características que

Cumplen esto (es decir, que $\exists t$ tq $c_1=t^3$, $c_2=t$, $c_3=0$) forman mi solución:

$$\boxed{\begin{cases} x(\sigma,t)=\frac{1}{2}t^3\sigma^2+t^4\sigma \\ y(\sigma,t)=\sigma+t \\ z(\sigma,t)=t^3 \end{cases}}$$

Comprobación:

- Si hago $\sigma=0$, obtengo mi curva inicial
- Vamos a comprobar que esto es solución. Para ello, hay que poner esto de forma implícita (despejo y sustituyo):

$$t=z^{1/3}$$

$$\sigma=y-t=y-z^{1/3}$$

$$x=\frac{1}{2}z(y-z^{1/3})^2+z^{4/3}(y-z^{1/3})=\frac{1}{2}z\left[y^2+z^{2/3}-2yz^{1/3}\right]+yz^{4/3}-z^{5/3}$$

$$x=\frac{1}{2}(zy^2-z^{5/3}) \; ; \; \overbrace{x-\frac{1}{2}(zy^2-z^{5/3})}^{\phi(x,y,z)}=0$$

Las derivadas se hacen de forma implícita:

$$\frac{d\phi}{dx}=0 \iff 1-\frac{1}{2}\left(y^2z_x-\frac{5}{3}z^{2/3}z_x\right)=0$$

$$1-\frac{1}{2}\left(y^2-\frac{5}{3}z^{2/3}\right)z_x=0 \; ; \; z_x=\frac{2}{y^2-\frac{5}{3}z^{2/3}}$$

$$\frac{d\phi}{dy}=0 \iff \frac{1}{2}\left[z_Y y^2+2yz-\frac{5}{3}z^{2/3}z_Y\right]=0$$

$$z_Y\left[y^2-\frac{5}{3}z^{2/3}\right]=-2yz \; ; \; z_Y=\frac{-2yz}{y^2-\frac{5}{3}z^{2/3}}$$

Evidentemente, $yz\,z_x+z_Y=0$

Más útil para hallar soluciones generales

2.- Se buscan integrales primeras:

$$\frac{dx}{yz} = \frac{dy}{1} = \frac{dz}{0}$$

El tercer término me dice $\Rightarrow z = cte. \equiv C_1$

Esto me permite integrar la otra EDO: $dx = yz\,dy = \int C_1 y\,dy = \int dx$

$$x = \frac{1}{2} C_1 y^2 + C_2$$

Aquí se ve mejor que la familia es biparamétrica:

$$\begin{cases} z = C_1 \\ x - \frac{1}{2} C_1 y^2 = C_2 \end{cases}$$

Cada par (C_1, C_2) me da una curva característica.

Ahora, la curva inicial me obliga a resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} z = C_1 \\ x - \frac{1}{2} C_1 y^2 = C_2 \\ x = 0 \\ z = y^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^3 = C_1 \\ -\frac{1}{2} C_1 y^2 = C_2 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} y^5 = C_2 \Updownarrow -\frac{1}{2} C_1^{3/5} = C_2$$

Igual que antes, quiero obtener la relación que debe haber entre C_2 y C_1 para que mi característica pase por mi curva inicial. En este caso, hemos llegado a:

$$\begin{cases} z = C_1 \\ x - \frac{1}{2} C_1 y^2 = -\frac{1}{2} C_1^{3/5} \end{cases} \Leftrightarrow x - \frac{1}{2} z y^2 = -\frac{1}{2} z^{3/5}$$

$$\Updownarrow$$

$$x = \frac{1}{2}\left(z y^2 - z^{3/5}\right)$$

En general, voy a tener:

$$\text{Características} \begin{cases} f_1(x,y,z) = C_1 \\ f_2(x,y,z) = C_2 \end{cases} \qquad \text{Características} + C.I. \begin{cases} f_1(x,y,z) = C_1 \\ f_2(x,y,z) = C_2 \\ f_3(x,y,z) = 0 \\ f_4(x,y,z) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow C_2 = f(C_1)$$

Uso las ecuaciones 1, 3 y 4 y despejo x, y, z en función de C_1 y los meto en la 2 y ya está hecho

Si tomo $f_3 = f_2(x,y,z) - f(f_1(x,y,z))$

Por tanto, la solución general corresponde a elegir $C_2 = f(C_1)$, con f cualquier función:

$$\begin{cases} z = C_1 \\ x - \frac{1}{2} C_1 y^2 = f(C_1) \end{cases}$$

Ahora es cuestión de sustituir C_1 de la 1ª ecuación:

$$x - \frac{1}{2} z y^2 = f(z) \Longrightarrow \text{SOLUCIÓN GENERAL}$$

Ahora es aún más fácil imponer la C.I.:

$$0 - \frac{1}{2} y^5 = f(z) \underset{y = z^{1/3}}{=} -\frac{1}{2} z^{5/3}$$

$$x = \frac{1}{2}\left(z y^2 - z^{5/3}\right)$$

2° ORDEN

· Vamos a empezar con un caso sencillo: dos variables independientes: (la discusión es idéntica para N variables. La curva dato son superficies a hallar)

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0$$

· Profundicemos algo más en cómo deducimos que $\exists!$ solución para un problema de valores iniciales. La idea es desarrollar en serie:

$$u(x,y) = u\big|_{(x_0,y_0)} + \nabla u\big|_{(x_0,y_0)} \cdot (x-x_0,\, y-y_0) + \underbrace{\ldots}_{\text{Términos de orden superior que se obtienen con } F \text{ y sus derivadas sucesivas}}$$

· Si yo tengo una curva dato: $\begin{cases} x = x(\tau) \\ y = y(\tau) \\ u = u(\tau) \end{cases}$, una manera de hallar $\nabla u = (u_x, u_y)$ será:

$$\dot{u} = u_x \dot{x} + u_y \dot{y}$$

- Tengo dos incógnitas. En 1er orden, F me daba otra ecuación, pero ahora $F = F(u_{xx}, u_{yy}, u_{xy}, \ldots)$, así que no me vale!!

- Voy a necesitar **una derivada en una dirección que no sea la de la curva $\Longleftrightarrow$ una derivada en dirección normal a la curva.** Pues en $\mathbb{R}^2$ siempre puedo descomponer un vector en $\begin{cases} \text{tgte a la curva } (\text{vec } \vec{\gamma}) \\ \text{normal a la curva } (\text{vec } \vec{n}) \end{cases}$ y $u_{\vec{v}} = u_{\vec{\gamma}} + u_{\vec{n}}$ (Si puedo saber conociendo la curva)

Así, esta derivada me va a dar $u_{\vec{v}} = (u_x, u_y) \cdot (v_x, v_y)$, otra ecuación que ya me permite hallar ∇u. Para derivadas sucesivas, tengo:

$$\begin{cases} F = 0 \\ \dot{u}_x = u_{xx}\dot{x} + u_{xy}\dot{y} \\ \dot{u}_y = u_{xy}\dot{x} + u_{yy}\dot{y} \end{cases}$$

· Por el teorema de la función implícita, la ecuación de las características es:

$$F_r \dot{y}^2 - F_s \dot{y}\dot{x} + F_t \dot{x}^2 = 0; \quad \text{con } \begin{cases} r = u_{xx} \\ s = u_{xy} \\ t = u_{yy} \end{cases}$$

Esto son curvas que viven en $\mathbb{R}^8$ (el parámetro con respecto al cual se deriva es el parámetro que parametriza las características)

LINEALIDAD EN SEGUNDAS DERIVADAS

$$A(x,y)\,u_{xx} + 2B(x,y)\,u_{xy} + C(x,y)\,u_{yy} = D(x,y,u,u_x,u_y)$$

· La ecuación de las características es:

$$\boxed{A(dy)^2 - 2B\,dy\,dx + C(dx)^2 = 0}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{A\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2B\frac{dy}{dx} + C = 0}$$

· En este caso, las características viven en el plano.

· Tengo una ecuación cuadrática en $\frac{dy}{dx}$, de discriminante $\Delta = B^2 - AC$ (esto, de hecho, vale también para el caso general, con $\Delta = F_s - 4F_r F_t$). Así, este determinante me permite clasificar una EDP de segundo orden:

- $\Delta = 0 \Rightarrow$ una única característica (familia uniparamétrica) $\Rightarrow$ PARABÓLICA
- $\Delta > 0 \Rightarrow$ dos características (familia biparamétrica) $\Rightarrow$ HIPERBÓLICA
- $\Delta < 0 \Rightarrow$ ninguna característica $\Rightarrow$ ELÍPTICA

Esta clasificación, en general, depende del punto.

· Vamos al caso más general: N variables independientes:

$$\sum_{i,j} A_{ij}(x_1,\dots,x_N)\,\partial_i\partial_j u = F(x_1,\dots,x_N,\partial_1 u,\dots,\partial_N u)$$

- ¡OJO! Para $i \neq j$, como sumo dos veces, habrá que tomar la mitad. Es decir, si tengo $6x_3\,\partial_1\partial_2$, $A_{12} = 3x_3 \neq 6x_3$

- Por igualdad de derivadas cruzadas, la matriz A es simétrica $\Rightarrow$ diagonalizable ortogonalmente en $\mathbb{R}$. Esto me permite una clasificación más general:

· **HIPERBÓLICA**: todos los valores propios salvo uno tienen el mismo signo

$$\Updownarrow$$

signatura $\begin{array}{l} + - - \dots \\ - + + + \dots \end{array}$

· **ELÍPTICA**: todos los valores propios tienen el mismo signo

$$\Updownarrow$$

signatura $\begin{array}{l} + + + \dots \\ - - - \dots \end{array}$

· **PARABÓLICA**: un valor propio es 0 y el resto tienen el mismo signo

$$\Updownarrow$$

signatura $\begin{array}{l} 0 + + + \dots \\ 0 - - - \dots \end{array}$

OJO! Como $\begin{pmatrix} + & \\ & + \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & + & \\ 0 & & + \end{pmatrix}$, hay que pedir que aparezca la derivada con respecto a la variable cuyo valor propio es 0

- Esta clasificación depende del punto y NO es absoluta

· La clasificación es muy útil para enunciar teoremas de existencia y unicidad:

TIPO	CONDICIONES QUE GARANTIZAN $\exists !$	EJEMPLO
HIPERBÓLICA	C.I. $\begin{cases} u\|_\gamma \\ \hat{n}_\gamma \cdot (\nabla u)_\gamma \end{cases}$ Consigo la derivada normal en γ, con saber que ∇u en γ basta → Derivada normal → curva para 2 variables independientes → superficie " 3 " con γ una frontera abierta que no sea tangente a las características	Ecuación de ondas: $u_{tt} - c^2 \nabla^2 u = 0$ la C.I. será, en un tambor, conocer la altura y velocidad en los bordes así como en un instante inicial Esto es una 4-superficie. Si supongo si el tambor es unidimensional: 
PARABÓLICA	O bien: 1- $u\|_\gamma$ 2- $\hat{n}_\gamma \cdot (\nabla u)_\gamma$ 3- $\alpha\, u\|_\gamma + \beta\, \hat{n}_\gamma \cdot (\nabla u)_\gamma$ con γ una frontera abierta que no sea tangente a características	Ecuación del calor: $u_t = \alpha^2 \nabla^2 u$ 1. T a los extremos y en un instante inicial 2. Impones aislamiento 3. Impones radiación
ELÍPTICA	O bien: 1- $u\|_\gamma$ (condiciones de Dirichlet) 2- $(\nabla u)_\gamma \cdot \hat{n}_\gamma$ (condiciones de Neumann) con γ una frontera cerrada	Ecuación de Poisson: $\nabla^2 u = \rho(x,y,z)$ (o la de Laplace) 1. Conozco el potencial en la frontera 2. Conozco el campo eléctrico en la frontera $\Downarrow$ Conozco la carga interior

COORDENADAS CARACTERÍSTICAS

- Sea una EDP.
- Si las características forman una familia paramétrica de curvas, el cambio de variable indep. (siempre que sea legal) a (algunos de) los parámetros puede simplificar la EDP.
- Por otra parte, al diagonalizar la matriz de coefs, obtendremos una base (que dependerá del punto) que, de nuevo, puede resultar útil aplicar.

Ejemplo 1:

$$\rho_x + \rho_y = \rho^2$$

Las ecuaciones de las características son: $\frac{dx}{1} = \frac{dy}{1} = \frac{d\rho}{\rho^2}$

Esto se resuelve muy bien con integrales primeras. Por la primera igualdad:

$$x - y = cte. \equiv u$$

Por la segunda:

$$x = -\frac{1}{\rho} + C_2$$

Ahora bien, la segunda característica no nos permite hacer un cambio de variable independiente (aparece ρ), así que uso la primera y otro cambio que sea compatible:

$$\begin{cases} u = x - y \\ v = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = u + v \\ y = v \end{cases}$$

. El dte. del Jacobiano vale $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$
$\Downarrow$
cambio legal
$\Downarrow$
$\rho = \rho(u,v)$

Ahora: $\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\partial \rho}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial \rho}{\partial u}$

$$\frac{\partial \rho}{\partial y} = \frac{\partial \rho}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \rho}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial \rho}{\partial u} + \frac{\partial \rho}{\partial v}$$

$\Rightarrow \rho_x + \rho_y = \rho_v = \rho^2$; $\frac{\partial \rho}{\partial v} = \rho^2$. Al derivar con respecto a una variable, esto es fácil de integrar:

$$-\frac{1}{\rho} = v + f(u)$$

$$\boxed{\rho = -\frac{1}{y + f(x-y)}}$$

Esto se podría haber hecho de otra manera:

$$\begin{cases} x-y=C_1 \\ x=-\dfrac{1}{p}+C_2 \end{cases}$$

Supongo $C_2=f(C_1)$: $\quad x=-\dfrac{1}{p}+g(x-y)$

$$p=-\frac{1}{x-g(x-y)}$$

Haciendo $g(x-y)=(x-y)+f(x-y)$ se llega al resultado de antes

Ejemplo 2:

Ecuación de ondas inhomogénea: $c^2 u_{xx}-u_{tt}=f(u,x,t,u_x,u_t)$

La ecuación de las características: $\quad c^2\,dt^2-dx^2=0$

$$\Updownarrow$$

$$(c\,dt-dx)(c\,dt+dx)=0$$

$$\Updownarrow$$

$$c\,dt=dx \qquad\qquad c\,dt=-dx$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad\qquad \Updownarrow$$

$$x-ct=\text{cte.}\equiv\alpha \qquad x+ct=\text{cte.}\equiv\beta$$

El cambio es (como las características no se involucran a u y tengo dos, uso ambas):

$$\begin{cases}\alpha=x-ct\\ \beta=x+ct\end{cases} \iff \begin{cases}x=2(\alpha+\beta)\\ t=\dfrac{1}{2c}(\beta-\alpha)\end{cases} \quad \text{Cambio legal} \Rightarrow u=u(\alpha,\beta)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial\beta}\frac{\partial\beta}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial\alpha}+\frac{\partial u}{\partial\beta}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial\beta}\frac{\partial\beta}{\partial t}=-c\frac{\partial u}{\partial\alpha}+c\frac{\partial u}{\partial\beta}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial\beta\partial x}=\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\partial\beta}+\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\partial\beta}+\frac{\partial^2 u}{\partial\beta^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c\left[\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)-\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\right]=c\left[-c\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\partial\beta}+c\frac{\partial^2 u}{\partial\beta^2}+c\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2}-c\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\partial\beta}\right]=c^2\left[\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial\beta^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\partial\beta}\right]$$

La ecuación queda:

$$\cancel{c^2 u_{\alpha\alpha}} + 2c^2 u_{\alpha\beta} + \cancel{c^2 u_{\beta\beta}} - \cancel{c^2 u_{\alpha\alpha}} - \cancel{c^2 u_{\beta\beta}} = f$$

$$u_{\alpha\beta} = \frac{f}{2c^2}$$

Bastante más simple. De hecho, si $f=0$ se obtiene la solución general conocida:

$$u(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct)$$