TRANSFORMADA DE FOURIER

- Hasta ahora sabemos expresar en serie de Fourier funciones periódicas, o funciones definidas en un intervalo (la serie de Fourier nos las extiende periódicamente):

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{2n\pi x}{T} + b_n \operatorname{sen}\frac{2n\pi x}{T}$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{\tau}^{\tau+T} f(t)\cdot\cos\frac{2n\pi t}{T}\,dt$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{\tau}^{\tau+T} f(t)\operatorname{sen}\frac{2n\pi t}{T}\,dt$$

- Vamos a intentar extender la idea: expresar cualquier función definida en todo $\mathbb{R}$ como una suma infinita de funciones armónicas. Para esto, el paso natural es tomar $T \to +\infty$. Esto va a provocar:
  - Las integrales de los coeficientes serán impropias (así que análogo pedimos converja $\Rightarrow f \in L^1$)
  - Como los términos de la serie se van a hacer infinitamente pequeños, tendremos una integral: expresaremos f como suma infinita de funciones armónicas infinitamente estrechas.

- La idea es sencilla. Sea $f \in L^1[\mathbb{R}]$ el $\lim_{l\to+\infty} f_l(x)$; con f_l una función periódica de periodo $2l$, o bien (es equivalente) una función definida en el intervalo $[-l, l]$.

- Intuitivamente, esto último se ve mejor: f_l es, simplemente, $f\big|_{[-l,l]}$
- De todas formas, lo que le pedimos a f_l es:
  - $\lim_{l\to+\infty} f_l(x) = f(x)$
  - f_l es desarrollable en serie de Fourier de periodo $2l$

Así:

$$f_\ell(x) = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} \frac{1}{2} f_\ell(t)\, dt + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f_\ell(t) \cos\frac{n\pi t}{\ell}\, dt \cdot \underbrace{\cos\frac{n\pi x}{\ell}}_{\text{Al no depender de } t \text{ entra a la integral}} + \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f_\ell(t) \,\mathrm{sen}\frac{n\pi t}{\ell}\, dt \cdot \underbrace{\mathrm{sen}\frac{n\pi x}{\ell}}_{\text{Entra a la integral}} =$$

$$= \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} dt\, f_\ell(t)\cdot\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} dt\, f_\ell(t) \cdot \underbrace{\left[\cos\frac{n\pi t}{\ell}\cos\frac{n\pi x}{\ell} + \mathrm{sen}\frac{n\pi t}{\ell}\,\mathrm{sen}\frac{n\pi x}{\ell}\right]}_{\cos\left(\frac{n\pi x}{\ell} - \frac{n\pi t}{\ell}\right)} =$$

↳ integral y serie converge

$$= \frac{1}{\ell}\left\{\int_{-\ell}^{\ell} dt\, f_\ell(t)\cdot\frac{1}{2} + \int_{-\ell}^{\ell}\sum_{n=1}^{\infty} dt\, f_\ell(t) \cos\frac{n\pi (x-t)}{\ell}\right\}$$

Agrupando las integrales y reorganizando:

$$f_\ell(x) = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} dt\, f_\ell(t)\left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{n\pi(x-t)}{\ell}\right] = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} dt\, f_\ell(t) + \int_{-\ell}^{\ell} dt\, f_\ell(t)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ell}\cos\frac{n\pi(x-t)}{\ell}$$

(A partir de ahora, aplicamos [illegible] lím [illegible] y lím [illegible] Rigurosamente, hay que probar que los límites existen, pero existe porque lo vamos a calcular)

Así,

$$f(x) = \lim_{\ell\to+\infty}\frac{1}{2}\frac{\int_{-\ell}^{\ell} dt\, f_\ell(t)}{\ell} + \lim_{\ell\to+\infty}\int_{-\ell}^{\ell} dt\, f_\ell(t)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ell}\cos\frac{n\pi(x-t)}{\ell} =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\frac{\left(\int_{-\infty}^{\infty} dt\, f(t)\right)}{(+\infty)}}_{\to 0 \text{ por ser } f\ L^1 \text{ (acotado a un número)}} + \int_{-\infty}^{\infty} dt\, f(t)\lim_{\ell\to+\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{\frac{1}{\ell}}_{\Delta x_n}\underbrace{\cos\frac{n\pi(x-t)}{\ell}}_{f(\xi_n)}$$

Intuitivamente, el límite que nos queda va a ser una integral.

Rigurosamente:

Si $f \in C[a,b]$, la integral de Riemann es:

- Se divide $[a,b]$ en una partición finita de N términos: $\{a = x_1, x_2, \dots, x_N = b\}$
- Se toma para cada intervalo $[x_k, x_{k+1}]$, de longitud Δx_k, un punto interior ξ_k
- Se define $\sum_{k=1}^{N} f(\xi_k)\,\Delta x_k$
- $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{\substack{\Delta x_k \to 0 \\ \forall k}} \sum_{k=1}^{N} f(\xi_k)\,\Delta x_k$ (lo cual de igual manera que si tomamos $N \to +\infty$)

Análogamente, para integrales impropias, sería $x_N \to +\infty$. Es decir:

- Se divide $[a,+\infty)$ en una partición infinita: $\{a = x_1, x_2, x_3, \dots\}$
- Para cada intervalo $[x_k, x_{k+1}]$, de longitud Δx_k, se toma un punto interior ξ_k
- Se define $\sum_{k=1}^{\infty} f(\xi_k)\,\Delta x_k$ (o, en la integral de Riemann, tomar $N \to +\infty$ pero sin variar Δx_k)
- $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,dt = \lim_{\substack{\Delta x_k \to 0 \\ \forall k}} \sum_{k=1}^{\infty} f(\xi_k)\,\Delta x_k$

En nuestro caso, tenemos:

$$\lim_{\ell \to +\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ell} \cos \frac{n\pi \overbrace{(x-t)}^{\text{son unos parámetros aparte}}}{\ell} = \frac{1}{\pi} \lim_{\ell \to +\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{\ell} \cos\left[\frac{n\pi}{\ell}(x-t)\right]$$

- Dividimos el intervalo $[0,+\infty)$ en la siguiente partición: $\left\{0, \frac{\pi}{\ell}, \frac{2\pi}{\ell}, \frac{3\pi}{\ell}, \frac{4\pi}{\ell}, \dots\right\}$
- Cada intervalo $[x_n, x_{n+1}]$ tiene de longitud $\Delta x_n = \frac{\pi}{\ell}$. Tomo el punto interior $x_n = \frac{n\pi}{\ell}$
- Sea $f(\lambda) = \cos(\lambda(x-t))$
- $$\int_0^{+\infty} f(\lambda)\,d\lambda \equiv \lim_{\frac{\pi}{\ell} \to 0} \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left[\frac{n\pi}{\ell}(x-t)\right] \cdot \frac{\pi}{\ell} = \boxed{\lim_{\ell \to +\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{\ell} \cdot \cos\left[\frac{n\pi}{\ell}(x-t)\right] = \int_0^{+\infty} \cos[\lambda(x-t)]\,d\lambda}$$

$$\parallel$$

$$\int_0^{+\infty} \cos(\lambda(x-t))\,d\lambda$$

Así:

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dt\, f(t)\cdot\int_{0}^{\infty}\cos[\lambda(x-t)]\,d\lambda \underset{\substack{\downarrow\\ \text{El coseno es par}}}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dt\, f(t) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}}_{\text{Valor principal}}\cos[\lambda(x-t)]\,d\lambda$$

Pero esto es una integral doble! Por Fubini:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda\int_{-\infty}^{\infty} dt\, f(t)\cos[\lambda(x-t)]$$

Rigurosamente, se cambia el orden y la integral en λ es 0

Ahora, como el seno es impar: $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda\int_{-\infty}^{\infty} dt\, f(t)\sin[\lambda(x-t)]=0$

Así, $f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda\int_{-\infty}^{\infty} dt\, f(t)\cos[\lambda(x-t)]+\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda\int_{-\infty}^{\infty} dt\, f(t)\sin[\lambda(x-t)]$:

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda\int_{-\infty}^{\infty} dt\, f(t)\,e^{i\lambda(t-x)}$$

Matemáticamente, hemos probado:

$$\forall f\in L^1[\mathbb{R}],\ f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda\int_{-\infty}^{\infty} d\xi\, f(\xi)\,e^{i\lambda(\xi-x)}$$

O, si definimos:

$$\hat{f}(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x)\,e^{ikx}$$

Entonces:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dk\, \hat{f}(k)\,e^{-ikx}$$

Físicamente, esto significa:

- Somos capaces de expresar cualquier función $\in L^1[\mathbb{R}]$ como suma infinita de funciones armónicas que, obviamente, tienen periodo infinito. El tomar tantos límites nos convierte las sumas en integrales, pero la idea es la misma.

- Igual que en Fourier los coeficientes a_n y b_n nos daban una idea de cuánto contribuía cada armónico, aquí $\hat{f}(k) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x)\, e^{ikx}$ nos da una idea de cuánto contribuye cada armónico de periodo $\frac{2\pi}{k}$. Si nos fijamos en el desarrollo matemático, esta integral = la que llamábamos a t $\Longrightarrow$ son los coeficientes !!!!

APLICACIONES

• Olvidémonos de cómo hemos llegado a ella, y definamos:

Transformada de Fourier de f: $\hat{f}(\lambda) \equiv A\int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x)\, e^{i\alpha x}$, con A y α constantes numéricas

Conocida la transformada, tal y como hemos visto:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda\, B e^{-i\beta\lambda x}\, \hat{f}(\lambda)$$, con B y β dependientes de A y α

• Tiene interesantes propiedades:

- $\mathcal{F}$ es lineal
- $\mathcal{F}[f'](x) = -ix\,\mathcal{F}[f](x)$

• Esta última propiedad es útil para resolver ecuaciones diferenciales. Ojo que, al contrario que con Laplace (que resulta ser un caso particular de transformada de Fourier), aquí las C.C. aparecen de manera sutil al integrar.

Ejemplo:

$$f' + \alpha f = g \Longrightarrow \mathcal{F}[f' + \alpha f] = \mathcal{F}[g] \Longrightarrow (-ix+\alpha)\,\mathcal{F}[f] = \mathcal{F}[g]$$

$\Downarrow$

Conocemos $\mathcal{F}[f]$

$\Downarrow$

Conocemos f