SEPARACIÓN DE VARIABLES

· La idea es, partiendo del siguiente problema:

$$\left\{\begin{array}{l} \text{EDP lineal} \\ \text{C.C. en una variable (le llamaré } x\text{)} \\ \text{C.I. en otra variable (le llamaré } t\text{)} \end{array}\right\} \rightarrow \text{El objetivo es hallar } u = u(x,t)$$

$\boxed{\text{hallar una base}}$ de funciones de x que cumplan las C.C. y que, al desarrollar todo en dicha base, nuestro problema se convierta en un problema de una EDO con condiciones iniciales.

· Aunque después se analizan bases útiles, el procedimiento general para buscar un problema de Sturm-Liouville que nos dé la base es:

1º- Mediante un cambio de variable dependiente, se hacen las C.C. homogéneas o periódicas.

2º- Se crea un nuevo problema en el que:

1- Desaparece el término inhomogéneo de la EDP
2- Se mantienen las C.C.
3- Se sustituye la C.I. por una condición de separación: $z = X(x)T(t)$
4- Se prohíben soluciones no triviales

Esto nos dará un problema de Sturm-Liouville

Ejemplo: ecuación del calor en una varilla homogénea teniendo los extremos T cte. y conocida la distribución inicial de temperaturas:

$$\begin{cases} u_t = k^2 u_{xx} & \} \text{ EDP} \\ u(0,t) = T_1 & \multirow{2}{*}{\} C.C. (guardan a distintos puntos)} \\ u(L,t) = T_2 & \\ u(x,0) = f(x) & \} \text{ C.I.} \end{cases}$$

Vamos a homogeneizar las C.C. Para ello, hacemos el siguiente cambio de variable:

$$v(x,t) = u(x,t) - g(x,t)$$

Con $g(x,t)$ una función que cumple:

- $g(0,t) = T_1$
- $g(L,t) = T_2$

$\Longrightarrow$ No nos complicamos la vida: $g(x,t) = g(x) = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{L} x$

Así, el cambio de variable es:

$$u(x,t) = v(x,t) + T_1 + \frac{T_2 - T_1}{L} x$$

- $u_t = v_t$
- $u_x = v_x + \frac{T_2 - T_1}{L}$; $u_{xx} = v_{xx}$
- $u(0,t) = v(0,t) + T_1$
- $u(L,t) = v(0,t) + T_2$
- $u(x,0) = v(x,0) + \underbrace{T_1 + \frac{T_2 - T_1}{L} x}_{\text{lo llamaré } g(x) \text{, teniendo siempre en cuenta que es una función conocida}}$

Y nuestro problema queda:

$$\begin{cases} v_t = k^2 v_{xx} \\ v(0,t)=0 \\ v(L,t)=0 \\ v(x,0)= f(x)-g(x) \equiv h(x), \text{ con } h \text{ una función conocida} \end{cases}$$

Vamos ahora al problema auxiliar para hallar la base:

$$\begin{cases} z_t = k^2 z_{xx} \ ; \ z \neq 0 \quad \text{Igual que en S-L, queremos soluciones no triviales} \\ z(0,t)=0 \\ z(L,t)=0 \\ z(x,t)= X(x)\,T(t) \end{cases}$$

Fijémonos en lo que implica la condición de separación:

$$z(0,t)=0 \iff X(0)\,T(t)=0 \quad \forall t \iff \begin{cases} T(t)=0 \ \forall t \Rightarrow \text{Absurdo pues } z \neq 0 \\ X(0)=0 \end{cases}$$

Análogamente, $z(L,t)=0 \iff X(L)=0$

Además, $z_t = X(x)\,\dot{T}(t)$

$z_{xx} = X''(x)\,T(t)$

Así que la condición de separación implica:

$$\begin{cases} X(x)\,\dot{T}(t) - k^2 X''(x)\,T(t)=0 \\ X(0)=0 \\ X(L)=0 \end{cases}$$

Como z no es siempre 0, puedo dividir por él: $\underbrace{\dfrac{\dot{T}(t)}{T(t)}}_{\text{sólo depende de } t} - k^2 \underbrace{\dfrac{X''(x)}{X(x)}}_{\text{sólo depende de } x} = 0$

Ahora, tengo una función de x y una de t que al restarlas dan siempre 0. Como x y t son independientes, esto ocurre si y sólo si ambas funciones son igual a la misma constante.

Demostración rigurosa:

- $f(x)-g(t)=0 \quad \forall x,t$. Como es $\forall x,t$, en particular:

  - $x=x_0 \Rightarrow g(t)=\underbrace{f(x_0)}_{\text{un número}} \ \forall t \underset{\text{Def.}}{\Longrightarrow} \underline{g(t)\ \text{cte}} \equiv \alpha$

  - $t=t_0 \Rightarrow f(x)=\underbrace{g(t_0)}_{\text{un número}} \ \forall x \underset{\text{Def.}}{\Longrightarrow} \underline{f(x)\ \text{cte.}} \equiv \beta$

$\alpha-\beta=0 \Leftrightarrow \underline{\alpha=\beta}$

Así, nuestro problema tiene ahora dos EDOs:

$$\begin{cases} \dfrac{\dot{T}}{T} = k^2 \dfrac{X''}{X} \overset{\text{llamamos a la cte.}}{\equiv} \underbrace{-k^2\lambda^2}_{\text{ctes positivas son } \lambda\in\mathbb{R} \text{ y ctes negativas } \lambda\in\mathbb{C}} \\ \\ X(0)=0 \\ X(L)=0 \end{cases}$$

Como las C.C. están en X, la EDO útil es la que tiene X, que nos dice:

$$\begin{cases} X''+\lambda^2 X=0 \overset{\lambda\neq 0 \text{ pues de ser } \lambda=0 \text{ será la solución trivial}}{\Longleftrightarrow} X=\alpha\cos\lambda x+\beta\,\text{sen}\,\lambda x \\ X\neq 0 \\ X(0)=0 \\ X(L)=0 \end{cases}$$

Las C.C. implican:

$$\begin{cases} \alpha=0 \\ \lambda L=n\pi\,;\ \lambda_n=\dfrac{n\pi}{L} \end{cases} \Longrightarrow X_n(x)=\text{sen}\,\dfrac{n\pi x}{L}$$

Tengo ya mi base de funciones de x: $\left\{\text{sen}\,\dfrac{n\pi x}{L}\right\}_{n=1}^{\infty}$

Desarrollo mi problema en esa base:

$$V(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n(t)\,\text{sen}\,\frac{n\pi x}{L} \Longrightarrow \begin{cases} V_t=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dot{c}_n(t)\,\text{sen}\,\frac{n\pi x}{L} \\ V_{xx}=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{n^2\pi^2}{L^2}\,c_n(t)\,\text{sen}\,\frac{n\pi x}{L} \end{cases}$$

Por esto necesito que las funciones de la base sean funciones propias, para que todos los desarrollos sean en la misma base

Las C.C. se satisfacen automáticamente por la base elegida

$$V(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n(0)\,\text{sen}\,\frac{n\pi x}{L}$$

$$h(x)=\sum_{n=1}^{\infty} h_n\,\text{sen}\,\frac{n\pi x}{L}\,,\ \text{con } h_n=\overset{\text{Ortogonalidad pues } a_1=1 \text{ y } a_0=0}{\frac{\int_0^L d\xi\, h(\xi)\,\text{sen}\,\frac{n\pi\xi}{L}}{\int_0^L d\xi\,\text{sen}^2\frac{n\pi\xi}{L}}}$$

, números que sabemos calcular

Es decir:

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dot{c}_n(t) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} = \\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n(0) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} \dot{c}_n(t) = -\dfrac{k^2 n^2 \pi^2}{L^2} c_n \Leftrightarrow c_n(t) = A\, e^{-\frac{k^2 n^2 \pi^2}{L^2} t} \\ c_n(0) = b_n \Rightarrow A = b_n \end{cases}$$

→ Tengo un conjunto infinito de problemas que resuelvo de una tacada

Así, $v(x,t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\frac{k^2 n^2 \pi^2}{L^2} t} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}$

Por tanto:

$$\boxed{u(x,t) = \left(T_1 + \frac{T_2 - T_1}{L} x\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\frac{k^2 n^2 \pi^2}{L^2} t} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}}$$

Comprobación:

· Dimensiones: u debe tener dimensión de temperatura:

$$[u] = [T] + \frac{[T]}{\cancel{[L]}} \cancel{[L]} + \sum [\varnothing] \underbrace{e^{-\frac{\cancel{[t]^{-1}} \cdot \cancel{[L]^2}}{\cancel{[L]^2}} \cancel{[t]}} \operatorname{sen} \frac{[L]}{[L]}}_{[\varnothing]} =$$

$$= [T]$$

· Convergencia de la serie: un checkeo rápido sería que $\lim_{n\to+\infty} b_n = 0$

· Situación estacionaria: físicamente, es de esperar que si $t \to +\infty$, la distribución de temperaturas vaya de T_1 a T_2 linealmente (situación de equilibrio). Si $t \to +\infty$, la exponencial de la serie tiende a 0 y nos queda justamente la distribución lineal.

CONDICIONES DE CONTORNO OCULTAS

- En ocasiones no se dan las condiciones de contorno, y hay que deducirlas del problema físico.
- Especialmente habitual es el caso de coordenadas polares (tanto en $\mathbb{R}^2$ como en $\mathbb{R}^3$), donde las C.C. ocultas suelen ser:

> – Si la variable angular recorre toda una vuelta, habrá que pedir periodicidad: si $u = u(\theta, \dots) \Rightarrow u(0, \dots) = u(2\pi, \dots)$
>
> $u_\theta(0, \dots) = u_\theta(2\pi, \dots)$ → se podría pedir cualquier derivada, pero al ser la C.C. en 0, en u_θ lo que [illegible] útil
>
> Pues 0 y 2π son el mismo punto
>
> – Suelen aparecer singularidades en el origen o los ejes. Matemáticamente, esto ocurre porque en coordenadas polares esos puntos son especiales. Sin embargo, como físicamente no tiene nada de especial, salvo que nuestro problema físico tenga singularidades, habrá que pedir regularidad en esos puntos.

ENCADENAMIENTO DE SEPARACIONES

- Los problemas interesantes físicamente suelen tener más de dos variables independientes.
- Por tanto, voy a necesitar una base en dos variables: $u(x, y, t) = \sum_{n,m} \overbrace{V_{nm}(t)}^{\text{Se obtienen con integrales dobles}} f_{nm}(x, y)$
- Es decir, me va a aparecer un problema de valores propios en varias variables. Hay esencialmente dos formas de resolver esto:
  - Si el operador es suma de operadores de una variable, los valores propios son la suma y las funciones propias son funciones propias de TODOS los operadores. → No puedo [illegible] ya he cogido [illegible]!!! (Pues tengo el producto tensorial de varios espacios vectoriales). P.ej.: $\nabla^2 = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$
  - Si no, hay que encadenar distintas separaciones

Ejemplo:

$$u = u(x,y,t)$$

$$\begin{cases} u_t = \nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} \\ u(x,y,0) = g(x,y) \\ u(0,y,t) = 0 \\ u(a,y,t) = 0 \\ u(x,0,t) = 0 \\ u(x,l,t) = 0 \end{cases}$$

El problema auxiliar es: (OJO, LAS SEPARACIONES SE HACEN DE 1 EN 1)

$$\begin{cases} Z_t = \nabla^2 Z \\ Z(0,y,t) = 0 \\ Z(a,y,t) = 0 \\ Z(x,0,t) = 0 \\ Z(x,l,t) = 0 \\ Z = A(x,y)\,T(t) \end{cases}$$

La condición de separación implica:

$$\begin{cases} A(x,y)\,\dot{T}(t) = T(t)\,\nabla^2 A(x,y) \\ A(0,y) = 0 \\ A(a,y) = 0 \\ A(x,0) = 0 \\ A(x,l) = 0 \end{cases}$$

Dividiendo y con el mismo argumento de antes, se llega a:

$$\begin{cases} \nabla^2 A + \lambda^2 A = 0 \\ A(0,y) = 0 \\ A(a,y) = 0 \\ A(x,0) = 0 \\ A(x,l) = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Problema auxiliar que al resolver nos dará una base

(Se podría aplicar el truco, pero voy a hacerlo con el método general)

Vuelvo a imponer separación para resolver este problema:

$$A = X(x)\, Y(y)$$

Me queda:

$$\begin{cases} X''(x)\, Y(y) + X(x)\, Y''(y) + \lambda^2 X(x)\, Y(y) = 0 \iff \dfrac{X''}{X} + \dfrac{Y''}{Y} + \lambda^2 = 0 \\ X(0)=0 \\ X(a)=0 \\ Y(0)=0 \\ Y(\ell)=0 \end{cases}$$

Es decir, tengo <u>dos</u> problemas (acoplados)

$$\begin{cases} \dfrac{X''}{X} = -\mu^2 \\ X(0)=0 \\ X(a)=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{Y''}{Y} = \mu^2 - \lambda^2 \\ Y(0)=0 \\ Y(\ell)=0 \end{cases}$$

El primero es inmediato: $\mu_n = \dfrac{n\pi}{a}$

$$X_n = \text{sen}\, \frac{n\pi x}{a}$$

Aunque el segundo es:

$$\begin{cases} \dfrac{Y''}{Y} = \dfrac{n^2\pi^2}{a^2} - \lambda^2 \\ Y(0) = Y(\ell) = 0 \end{cases}$$

Nótese que cada n me va a dar infinitos λ: $\quad \frac{n^2\pi^2}{a^2} - \lambda^2 \equiv \chi^2$. Así, $\frac{Y''}{Y} = \chi^2 \Rightarrow \chi^2 = \frac{m^2\pi^2}{\ell^2} \Rightarrow \lambda^2 = \frac{n^2\pi^2}{a^2} - \frac{m^2\pi^2}{\ell^2}$

$$\lambda^2_{nm} = \frac{m^2\pi^2}{\ell^2} - \frac{n^2\pi^2}{a^2}$$

$$Y_{nm} = \text{sen}\, \frac{m\pi y}{\ell}$$

Así que he resuelto mi problema auxiliar:

$$\boxed{\begin{aligned} A_{nm} &= \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{a}\operatorname{sen}\frac{m\pi y}{b} \\ \lambda^2_{nm} &= \frac{n^2\pi^2}{a^2} - \frac{m^2\pi^2}{b^2} \end{aligned}}$$

En general habría que ortogonalizar, pero esto ya es ortogonal

(Recordar que cumple $\nabla^2 A = -\lambda^2 A$)

Tengo ya mi base. Vamos a desarrollar:

$$u(x,y,t) = \sum_{n,m=1}^{\infty} u_{nm}(t)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{a}\operatorname{sen}\frac{m\pi y}{b}$$

$$g(x,y) = \sum_{n,m=1}^{\infty} g_{nm}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{a}\operatorname{sen}\frac{m\pi y}{b}\ ;\ \text{con } g_{nm} = \frac{\int_0^a dx\int_0^b dy\, g(x,y)\, A_{nm}(x,y)}{\int_0^a dx\int_0^b dy\, A^2_{nm}(x,y)}$$

Queda:

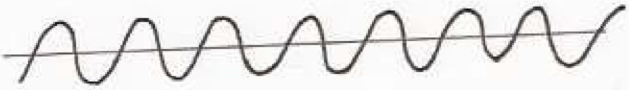
$$\begin{cases} \dot{u}_{nm} = -\lambda^2_{nm} u_{nm} \\ u_{nm}(0) = g_{nm} \end{cases} \Rightarrow u_{nm} = g_{nm}\, e^{-\lambda^2_{nm} t}$$

Así:

$$\boxed{\begin{aligned} u(x,y,t) &= \sum_{n,m=1}^{\infty} g_{nm}\, e^{-\lambda^2_{nm} t}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{a}\operatorname{sen}\frac{m\pi y}{b}, \text{ con} \\ g_{nm} &= \frac{2}{ab}\int_0^a dx\int_0^b dy\, g(x,y)\, A_{nm}(x,y) \\ \lambda^2_{nm} &= \frac{n^2\pi^2}{a^2} - \frac{m^2\pi^2}{b^2} \end{aligned}}$$

CATÁLOGO

- Muchas veces la simetría del problema me permite eliminar variables.
- Si en una variable sólo hay derivadas segundas y tiene C.C. periódicas, sin dudarlo, desarrollo en serie de Fourier.
- Si, bajo las mismas condiciones, las C.C. son homogéneas, la base se puede hallar gráficamente:



Una de las C.C. me dice dónde empieza la función y la otra dónde acaba. Moviendo esto último se obtienen las distintas funciones propias.

- Por último, bajo simetrías cilíndricas, es muy común que aparezca la siguiente EDO:

$$\frac{1}{x}(x f')' + \left(\lambda^2 - \frac{n^2}{x^2}\right) f = 0 \Rightarrow \frac{1}{x}(x f')' - \frac{n^2}{x^2} f = -\lambda^2 f$$

$$\Updownarrow$$

$$f'' + \frac{1}{x} f' + \left(\lambda^2 - \frac{n^2}{x^2}\right) f = 0$$

La ecuación de Bessel: $f = \alpha J_n(\lambda x) + \beta Y_n(\lambda x)$

Ejemplo: ecuación del calor en un disco de radio a

$$\begin{cases} \gamma^2 \nabla^2 u = u_t \\ u(r,\theta,0) = g(r,\theta) \to C.I. \\ u(a,\theta,t) = 0 \end{cases}$$

Aparentemente faltan: · 2 C.C. en θ
· 1 C.C. en r

Sin embargo, el hecho de estar trabajando en un disco me impone la C.C. oculta de periodicidad.

La C.C. en r probablemente sea regularidad.

Así, tengo:

$$\begin{cases} \gamma^2\left[\frac{1}{r}\partial_r(r u_r) + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}\right] = u_t \\ u(r,\theta,0) = g(r,\theta) \\ u(a,\theta,t) = 0 \\ u(r,0,t) = u(r,2\pi,t) \\ u_\theta(r,0,t) = u_\theta(r,2\pi,t) \end{cases}$$

Como tengo C.C. periódicas en θ y sólo hay $u_{\theta\theta}$, ni me lo pienso: desarrollo en serie de Fourier:

$$u = \frac{A_0(r,t)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n(r,t)\cos n\theta + B_n(r,t)\sin n\theta$$

$$\cdot\ u_r = \frac{\partial_r A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \partial_r A_n \cos n\theta + \partial_r B_n \sin n\theta$$

$$\cdot\ u_{\theta\theta} = \sum_{n=1}^{\infty} -n^2 A_n \cos n\theta - n^2 B_n \sin n\theta$$

$$\cdot\ u_t = \frac{\partial_t A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \partial_t A_n \cos n\theta + \partial_t B_n \sin n\theta$$

$$g(r,\theta) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta$$, con α_n y β_n calculables

Sustituyendo, me queda:

$$\begin{cases} \gamma^2\left[\frac{1}{r}\partial_r(r\partial_r A_n) - \frac{n^2}{r^2}A_n\right] = \partial_t A_n \\ A_n(r,0) = \alpha_n \\ A_n(a,t) = 0 \end{cases}$$

La misma ecuación para B_n y $\frac{A_0}{2}$.

Resolver mi problema equivale a resolver esto.

Pruebo a aplicar separación de variables:

$$\begin{cases} \gamma^2\left[\frac{1}{r}(rR'T)' - \frac{n^2}{r^2}RT\right] = R\dot{T} \\ R(a)=0 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} T\gamma^2\left[\frac{1}{r}(rR')' - \frac{n^2}{r^2}R\right] = R\dot{T} \\ R(a)=0 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} \gamma^2\left[\frac{1}{rR}(rR')' - \frac{n^2}{r^2}\right] = \frac{\dot{T}}{T} \equiv -\lambda^2\gamma^2 \\ R(a)=0 \end{cases}$$

Es decir, tengo en R el siguiente problema de Sturm-Liouville:

$$\begin{cases} \frac{1}{rR}(rR')' - \frac{n^2}{r^2} = -\lambda^2 \\ R(a)=0 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} \frac{1}{r}(rR')' + \left(\lambda^2 - \frac{n^2}{r^2}\right)R = 0 \iff R = \alpha J_n(\lambda r) + \beta Y_n(\lambda r) \\ R(a)=0 \end{cases}$$

Me falta una C.C. en el origen, y es precisamente la regularidad, pues $Y_n(0)$ diverge $\Longrightarrow \beta = 0$

Así, la otra C.C. es: $J_n(\lambda a) = 0 \iff \lambda = \frac{\xi_k^{n)}}{a}$, con $\xi_k^{n)}$ el k-ésimo 0 de la n-ésima función de Bessel.

Por tanto, ya tengo mi base: $\left\{J_n\left(\frac{\xi_k^{n)}}{a}r\right)\right\}_{k=1}^{\infty}$.

Además, por construcción, cumplen (sea y_n^k un elemento de la base):

$$\gamma^2\left[\frac{1}{r}\partial_r(r\partial_r y_n^k(r)) - \frac{n^2}{r^2}y_n^k(r)\right] = -\gamma^2\lambda_n^{k^2} y_n^k(r)$$

Por tanto, si desarrollo en esta base:

$$A_n(r,t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_n^k(t)\, J_n\left(\frac{\xi_k^{n)}}{a}r\right)$$

$$\alpha_n(r) = \sum_{k=1}^{\infty} \delta_n^k\, J_n\left(\frac{\xi_k^{n)}}{a}r\right) \qquad \text{con } \delta_n^k = \frac{\displaystyle\int_0^a dr\cdot \overset{\text{Peso}}{r}\cdot J_n\left(\frac{\xi_k^{n)}}{a}r\right)\cdot\alpha_n(r)}{\displaystyle\int_0^a dr\cdot r\cdot J_n^2\left(\frac{\xi_k^{n)}}{a}r\right)}$$

Me quedará:

$$\begin{cases} -\left(\gamma\dfrac{\xi_k^n}{a}\right)^2 a_n^k(t) = \dot{a}_n^k(t) \\ a_n^k(0) = \delta_n^k \end{cases} \Rightarrow a_n^k(t) = \delta_n^k\, e^{-\left(\frac{\gamma\xi_k^n}{a}\right)^2 t}$$

Es decir:

$$u(r,\theta,t) = A_0(r,t) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n(r,t)\cos n\theta + B_n(r,t)\,\text{sen}\, n\theta \text{ ; con:}$$

n-ésimo 0 de la k-ésima función de Bessel

$$\cdot\ A_n(r,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\delta_n^k\, e^{-\left(\frac{\gamma\xi_k^n}{a}\right)^2 t}\, J_n\left(\frac{\xi_k^n}{a}r\right)$$

$$\delta_n^k = \frac{\int_0^a dr\cdot r\cdot J_n\left(\frac{\xi_k^n}{a}r\right)\cdot\alpha_n(r)}{\int_0^a dr\cdot r\cdot J_n^2\left(\frac{\xi_k^n}{a}r\right)}, \text{ siendo } \alpha_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(r,\theta)\cos n\theta\, d\theta$$

$$\alpha_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(r,\theta)\,d\theta$$

$$\cdot\ B_n(r,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\eta_n^k\, e^{-\left(\frac{\gamma\xi_k^n}{a}\right)^2 t}\, J_n\left(\frac{\xi_k^n}{a}r\right)$$

$$\eta_n^k = \frac{\int_0^a dr\cdot r\cdot J_n\left(\frac{\xi_k^n}{a}r\right)\cdot\beta_n(r)}{\int_0^a dr\cdot r\cdot J_n^2\left(\frac{\xi_k^n}{a}r\right)}, \text{ siendo } \beta_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(r,\theta)\cdot\text{sen}\, n\theta\, d\theta$$

· Hay una base especialmente útil para simetría esférica. En concreto, con simetría esférica me refiero a:

1. El problema se describe en coordenadas esféricas

2. Hay periodicidad en la variable φ

3. El eje $\theta = 0$ no tiene nada de especial (regularidad ahí)

Bajo esas condiciones, una base adecuada es:

$$\boxed{Y_\ell^m(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}}\; P_\ell^m(\cos\theta)\, e^{im\varphi}}$$

donde:
- $P_\ell^m(t)$ es la función asociada de Legendre
- Caso 1-3: si no hay dependencia en φ
- $m = 0 \Longrightarrow P_\ell^0(t) = P_\ell(t)$; el ℓ-ésimo polinomio de Legendre
- m va de $-\ell$ a ℓ

Así, $f(\theta,\varphi) = \sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell} c_{\ell m}\, Y_\ell^m(\theta,\varphi)$, con:

Ángulo sólido

$$\boxed{c_{\ell m} = \int_{S^2} d\Omega\, \overline{Y_\ell^m(\theta,\varphi)}\, f(\theta,\varphi) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta\, \overline{Y_\ell^m(\theta,\varphi)}\, f(\theta,\varphi)}$$

S^2: esfera

· Los armónicos esféricos cumplen:

· Ortonormalidad: $\int_{S^2} d\Omega\, \overline{Y_{\ell'}^{m'}(\theta,\varphi)}\, Y_\ell^m(\theta,\varphi) = \underline{\delta_{\ell\ell'}\delta_{mm'}}$

· Son funciones propias del laplaciano: $\boxed{\nabla^2 Y_\ell^m(\theta,\varphi) = -\frac{1}{r^2}\,\ell(\ell+1)\, Y_\ell^m(\theta,\varphi)}$

. En lo que respecta al laplaciano, hay una bonita propiedad:

$$\nabla^2\left(\sum_{l,m} c_{lm}(r)\, Y_m^l(\theta,\varphi)\right) = \sum_{l,m}\left[Y_m^l(\theta,\varphi)\cdot\nabla^2 c_{lm}(r) + c_{lm}(r)\cdot\nabla^2 Y_m^l(\theta,\varphi)\right]$$

se deduce inmediatamente porque las derivadas están separadas en variables

Justificación:

Queremos los valores propios del laplaciano en esféricas, con las dos C.C. que hemos pedido (periodicidad y regularidad):

$$\begin{cases} \nabla^2 u = -\lambda^2 u \\ u(r,\theta,0) = u(r,\theta,2\pi) \\ u_\varphi(r,\theta,0) = u_\varphi(r,\theta,2\pi) \\ u \text{ regular en } \theta=0,\ \theta=\pi \end{cases}$$

Estrictamente: si quiero un sistema de coordenadas, puedo situar el eje a mi gusto, pues lo que no tiene nada de especial

Dada la periodicidad, desarrollo en serie de Fourier:

$$u(r,\theta,\varphi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m(r,\theta)\, e^{im\varphi} \ ; \ c_m \propto \int_0^{2\pi} u(r,\theta,\varphi)\, \overline{e^{im\varphi}}\, d\varphi$$

$$\cdot\ \partial_r u = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \partial_r c_m(r,\theta)\, e^{im\varphi}$$

$$\cdot\ \partial_\theta u = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \partial_\theta c_m(r,\theta)\, e^{im\varphi}$$

$$\cdot\ \partial^2_\varphi u = \sum_{m=-\infty}^{\infty} -m^2 c_m(r,\theta)\, e^{im\varphi}$$

Así, como $\nabla^2 u = \frac{1}{r^2}\partial_r(r^2 \partial_r u) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\theta}\partial_\theta(\operatorname{sen}\theta\, \partial_\theta u) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2\theta}\partial^2_\varphi u$, mi ecuación queda:

$$\begin{cases} \frac{1}{r^2}\partial_r(r^2 \partial_r c_m) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\theta}\partial_\theta(\operatorname{sen}\theta\, \partial_\theta c_m) + \left(\lambda^2 - \frac{m^2}{r^2 \operatorname{sen}^2\theta}\right) c_m = 0 \\ c_m \text{ regular en } \theta = 0,\ \theta=\pi \end{cases}$$

Aplico separación de variables y multiplico por r^2:

$$\begin{cases} (r^2 R'(r))'\, \Theta(\theta) + \dfrac{(\operatorname{sen}\theta\, \Theta'(\theta))' R(r)}{\operatorname{sen}\theta} + \lambda^2 r^2\, \Theta(\theta) R(r) - \dfrac{m^2}{\operatorname{sen}^2\theta}\Theta(\theta) R(r) = 0 \\ \Theta(0) \text{ regular} \\ \Theta(\pi) \text{ regular} \end{cases}$$

Dividiendo por ΘR y reorganizando:

$$\begin{cases} \dfrac{(\operatorname{sen}\theta\, \Theta')'}{\Theta \operatorname{sen}\theta} - \dfrac{m^2}{\operatorname{sen}^2\theta} = -\dfrac{(r^2 R')'}{R} - \lambda^2 r^2 \equiv -\gamma \\ \Theta \text{ regular} \end{cases}$$

Es decir:

$$\begin{cases} \dfrac{(\operatorname{sen}\theta\, \Theta')'}{\operatorname{sen}\theta} - \dfrac{m^2}{\operatorname{sen}^2\theta}\Theta + \gamma\Theta = 0 \\ \Theta \text{ regular} \end{cases}$$

Hacemos el cambio de variable:

$$\begin{cases} t = \cos\theta \\ \Theta(\theta) = P(t) \end{cases}$$

→ Normalmente escribimos $\Theta(t)$, pero esto es más correcto

Queda:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left[(1-t^2)\dfrac{d}{dt}P(t)\right] + \left(\gamma - \dfrac{m^2}{1-t^2}\right)P(t) = 0 \\ P \text{ regular en } \pm 1 \end{cases}$$

Aplicando Frobenius (detallado en Moodle), resulta que la única forma de que esto no estalle en ± 1 es cortar la serie. Además, esto nos exige:

$$\gamma = \underline{\ell(\ell+1)}\ ;\ \ell \in \mathbb{Z}$$ → El valor propio (cambiando de signo y dividiendo entre r^2)

→ Nótese que, al ser polinomios, la base es finita

$$P(t) = P_\ell^m(t) \Longrightarrow \text{Mi base es, para cada } m,\ \left\{P_\ell^m(\cos\theta)\right\}_{\ell=-m}^{m}$$

ℓ → Para que la solución sea regular, ℓ debe estar entre $-m$ y m

$$C_m(r,\theta) = \sum_{\ell=-m}^{m} c_m^\ell\, P_\ell^m(\cos\theta)\ , \text{ con } c_m^\ell \propto \int_{-1}^{1} C_m(r,t)\, \overline{P_\ell^m(t)}\, dt = \left| \begin{array}{l} t = \cos\theta \begin{cases} 1 = \cos 0 \\ -1 = \cos\pi \end{cases} \\ dt = -\operatorname{sen}\theta\, d\theta \end{array} \right| =$$

$$= \int_0^\pi C_m(r,\theta)\, \overline{P_\ell^m(\cos\theta)}\, \operatorname{sen}\theta\, d\theta$$

Es decir, he resuelto mi problema (lo hallado en los):

$$u(r,\theta,\varphi)=\sum_{m=-\infty}^{\infty} \overset{\nearrow \text{cte de normalización de las integrales}}{A}\, e^{im\varphi}\cdot\left(\sum_{\ell=-m}^{m}\int_0^{\pi}\left(\int_0^{2\pi}u(r,\theta,\varphi)\,\overline{e^{im\varphi}}\,d\varphi\right)\overline{P_\ell^m(\cos\theta)}\,\operatorname{sen}\theta\, d\theta\cdot P_\ell^m(\cos\theta)\right)=$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{\ell=-m}^{m}\underbrace{\left[A\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}d\theta\,\operatorname{sen}\theta\; u(r,\theta,\varphi)\,\overline{e^{im\varphi}P_\ell^m(\theta)}\right]}_{\propto c_{\ell m}}\cdot\underbrace{P_\ell^m(\cos\theta)\,e^{im\varphi}}_{\propto Y_\ell^m(\theta,\varphi)}$$

Sea lo que sea u