FUNCIONES ESPECIALES

FUNCIONES DE BESSEL $J_n(x)$

- Son solución de la ecuación de Bessel:

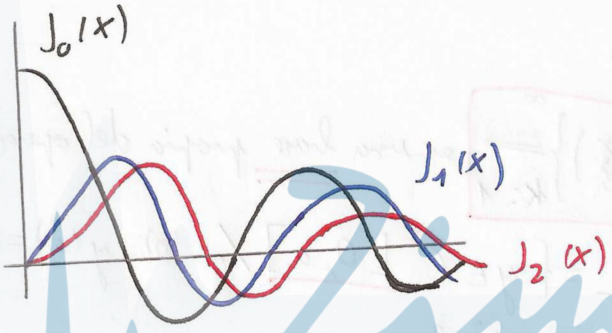
$$\frac{1}{x}(xf')' + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) f = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$x^2 f'' + x f' + (x^2 - n^2) f = 0$$

(Muchas veces aparece $\frac{1}{x}(xf')' + (\lambda^2 - \frac{n^2}{x^2}) f = 0 \Leftrightarrow x^2 f'' + x f' + (\lambda^2 x^2 - n^2) f = 0$, de solución $J_n(\lambda x)$)

- Gráficamente, son funciones oscilantes amortiguadas (caen cada vez más lento, como $\frac{1}{\sqrt{x}}$, pero al final caen):



$$|J_0(x)| \leq 1$$

$$|J_n(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \forall n > 1$$

- En el origen van como $x^n \Longrightarrow J_0(0) = 1$ pero $J_n(0) = 0 \quad \forall n > 0$

- Tienen infinitos ceros (tabulados) que cumplen:

  - Sea ξ_n^m el m-ésimo cero de la n-ésima función de Bessel:

los ceros obvios

$$m' > m \Longrightarrow \xi_n^{m'} > \xi_n^m$$

$$\boxed{n' > n \Longrightarrow \xi_{n'}^m > \xi_n^m}$$

  - Entre dos ceros de J_n, habrá uno de J_{n+1}

- Asintóticamente:

$$J_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(\cos\left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{x}\right) \right)$$

- Propiedades como funciones:

Definición: $$J_n(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,\underset{\hookrightarrow (n+k)!\text{ si } n\in\mathbb{N}}{\Gamma(n+k+1)}}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(x\sin\varphi-n\varphi)\,d\varphi$$

Relaciones diferente n
$$\left\{\begin{array}{l}\cdot\ J_{-n}(x)=(-1)^n J_n(x)\quad\forall n\in\mathbb{N}\\[2ex] \cdot\ J_{n-1}(x)+J_{n+1}(x)=\frac{2n}{x}J_n(x)\end{array}\right.$$

Derivadas
$$\left\{\begin{array}{l}\cdot\ J_n'(x)=\frac{1}{2}\left[J_{n-1}(x)-J_{n+1}(x)\right]\ ;\qquad \cdot\ xJ_n'(x)=nJ_n(x)-xJ_{n+1}(x)\\[2ex] \cdot\ \left[x^nJ_n(x)\right]'=x^nJ_{n-1}(x)\rightarrow\underline{\underline{\text{Útiles}}}\ ;\quad \cdot\ 2xJ_n^2(x)=\underset{\hookrightarrow\text{ útil pocas veces}}{\left[x^2\left(J_n^2(x)-J_{n+1}(x)J_{n-1}(x)\right)\right]'}\\[2ex] \cdot\ \left[x^{-n}J_n(x)\right]'=-x^{-n}J_{n+1}(x)\end{array}\right.$$

- Propiedades como vectores:

  - $\boxed{\left\{J_n\left(\xi_k^n\frac{x}{a}\right)\right\}_{\substack{n\text{ fijo}\\ k=1}}^{\infty}}$ es una <u>base</u> propia del operador $Ly\equiv-\frac{1}{x}(xy')'+\frac{n^2}{x^2}y$,

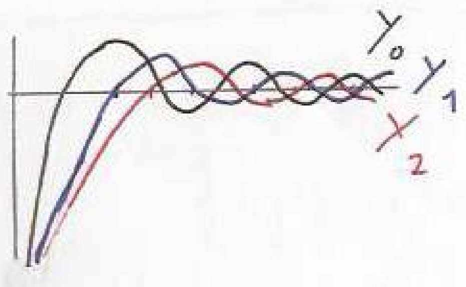
    $\text{dom}\,L=\{y\in C^2\underline{[0,a]}\ /\quad y(a)=0\ ;y(0)\text{ regular}\}$ de valor propio $\left(\xi_k^n\frac{1}{a}\right)^2$.

  - Así, es ortogonal con respecto al <u>peso x</u>: $\int_0^a J_n\left(\xi_k^n\frac{x}{a}\right)J_n\left(\xi_{k'}^n\frac{x}{a}\right)x\,dx\propto\delta_{kk'}$

De hecho, su norma vale: $$\boxed{\int_0^a J_n\left(\xi_k^n\frac{x}{a}\right)J_n\left(\xi_{k'}^n\frac{x}{a}\right)x\,dx=\delta_{kk'}\frac{a^2}{2}J_{n+1}^2\left(\xi_k^n\right)}$$

- <u>La otra solución L.I.</u> de la ecuación de Bessel es la función de Bessel de segunda especie o de Neuman: $Y_n(x)$. <u>Divergen en el origen</u>:
  - $Y_0\sim\ln x$
  - $Y_n=-\frac{1}{x^n}\quad\forall n>0$

Gráficamente:



Asintóticamente:

$$Y_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(\text{sen} \left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) + O\left(\frac{1}{x}\right) \right)$$

FUNCIONES DE BESSEL HIPERBÓLICAS/ESFÉRICAS $I_n(x)$

· Son solución de la ecuación de Bessel modificada:

$$\frac{1}{x}(xf')' - \left(1+\frac{n^2}{x^2}\right)f=0$$

$$\Updownarrow$$

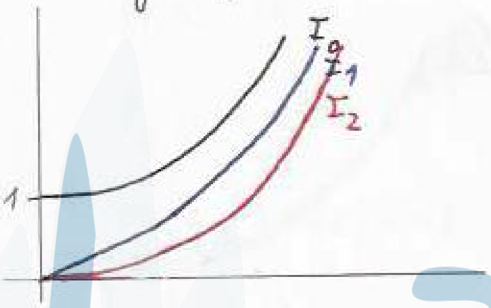
$$x^2f''+xf'-(x^2+n^2)f=0$$

Como antes, si tengo $\frac{1}{x}(xf')' - \left(\lambda^2+\frac{n^2}{x^2}\right)f=0$ $\qquad I_n(\lambda x)$

$$\Updownarrow$$

$$x^2f''+xf'-(\lambda^2x^2+n^2)f=0$$

· Gráficamente:



· Se relacionan fácilmente con las funciones de Bessel:

$$\underline{I_n(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}\,J_{n+1/2}(x)}$$

$$\underline{I_n(x)=i^{-n}J_n(ix)}$$

· Tiene una fórmula útil: $I_n(x)=(-x)^n\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n\left(\frac{\operatorname{sh} x}{x}\right)$

· La otra solución es $K_n(x)$, que diverge en el origen

De nuevo, esto está relacionado con Y_n: $K_n(x)=\frac{1}{2}\pi i^{n+1}Y_n(ix)$

POLINOMIOS DE LEGENDRE $P_l(x)$

- Son la solución de la ecuación de Legendre que no diverge en $x = \pm 1$:

$$\left[(1-x^2)\,y'(x)\right]' + \underbrace{l(l+1)}_{\text{Si este término no es de la forma } l(l+1)\text{, todas las soluciones divergen en } \pm 1 \quad l \in \mathbb{N}} y(x) = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$(1-x^2)\,y'' - 2xy' + l(l+1)\,y = 0$$

- Son polinomios:

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1)$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3-3x)$$

- Propiedades como polinomios:
  - $P_l(1) = 1 \quad \forall l$
  - $P_{2n} = f(x^2)$ y, por tanto, par $\quad \Longleftrightarrow \quad P_l(-x) = (-1)^l P_l(x)$

    P_{2n+1} es impar (función de exponentes impares)

- Propiedades como funciones:

Definición

$$\cdot\, P_l(x) = \frac{1}{2^l}\sum_{k=0}^{2k\le l} \frac{(-1)^k}{k!}\frac{(2(l-k))!}{(l-2k)!\,(l-k)!}\,\overset{\text{Potencia decreciente}}{x^{l-2k}} = \sum_{k=0}^{l} \frac{(l+k)!}{(l-k)!\,(k!)^2\,2^k}\,(-1)^k\,\overset{\text{Potencia creciente}}{(1-x)^k}$$

$$\cdot\, \text{Fórmula de Rodrigues: } P_l(x) = \frac{1}{2^l\,l!}\frac{d^l}{dx^l}\left[(x^2-1)^l\right]$$

Lo útil para [illegible]

Propiedades muy útiles que no sabes para qué sirven

- $(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0$
- $P'_n(x) - 2xP'_{n-1}(x) + P'_{n-2}(x) = P_{n-1}(x)$
- $P'_{n+1}(x) - xP'_n(x) = (n+1)P_n(x)$
- $xP'_n(x) - P'_{n-1}(x) = nP_n(x)$
- $P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x) = (2n+1)P_n(x)$
- $(x^2-1)P'_n(x) = nxP_n(x) - nP_{n-1}(x)$

- Propiedades como vectores:

  - $\boxed{\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}}$ es una base propia del operador $Ly \equiv \frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dy}{dx}\right]$,

    $\text{dom}\, L = \{y \in C^2[-1,1] \,/\, y(-1) \text{ regular}, y(1) \text{ regular}\}$, de valor propio $-n(n+1)$

  - Así, es ortogonal con respecto al producto escalar canónico: $\int_{-1}^{1} P_n(x) P_{n'}(x)\,dx \propto \delta_{nn'}$

    De hecho, su norma vale: $\boxed{\int_{-1}^{1} P_n(x) P_{n'}(x)\,dx = \delta_{nn'} \frac{2}{2n+1}}$

- Otra manera de llegar a estos polinomios es ortogonalizar vía Gram-Schmidt la base $\{1, x, x^2, x^3, \dots\}$ e imponer $P_n(1) = 1$

- Es común desarrollar funciones angulares en una ligera variante (armónicos esféricos si depende φ)

  - $\{P_\ell(\cos\theta)\}_{\ell=0}^{\infty}$ es una base propia del operador $Ly \equiv \frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left[\sin\theta \frac{dy}{d\theta}\right]$,

    $\text{dom}\, L = \{y \in C^2[0,\pi] \,/\, y(0) \text{ regular}, y(\pi) \text{ regular}\}$, de valor propio $-\ell(\ell+1)$

  - Así, es ortogonal con respecto al peso $\sin\theta$: $\int_0^{\pi} d\theta \sin\theta\, P_\ell(\cos\theta) P_{\ell'}(\cos\theta) \propto \delta_{\ell\ell'}$

    De hecho, su norma vale: $\boxed{\int_0^{\pi} d\theta \sin\theta\, P_\ell(\cos\theta) P_{\ell'}(\cos\theta) = \delta_{\ell\ell'} \frac{2}{2\ell+1}}$

FUNCIONES ASOCIADAS DE LEGENDRE $P_\ell^m(x)$

· Son solución de la ecuación asociada de Legendre:

$$\left[(1-x^2)y'\right]' + \left[\underbrace{\ell(\ell+1)}_{} - \frac{m^2}{1-x^2}\right]y = 0$$

De nuevo, sólo
tiene esta forma, si no diverge en ±1

$$\Updownarrow$$

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \left[\ell(\ell+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right]y = 0$$

Para que esto no diverja en ±1, hay que pedir, además:

- $m \in \mathbb{Z}$
- $m \in [-\ell, \ell]$

Me limitaré a este caso a partir de ahora. (se suele llamar polinomios asociados de Legendre, pero no son polinomios)

· $m=0$ son los polinomios de Legendre

· Propiedades como funciones: (son fáciles de relacionar con polinomios de Legendre)

Definición para $m>0$

$$\left\{\begin{array}{l} \cdot\ P_\ell^m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{m/2} \dfrac{d^m}{dx^m} P_\ell(x) \\ \cdot\ P_\ell^m(x) = \dfrac{(-1)^m}{2^\ell \ell!} (1-x^2)^{m/2} \dfrac{d^{m+\ell}}{dx^{m+\ell}} (x^2-1)^\ell \end{array}\right.$$

Definición para $m<0$

$$\left\{ \cdot\ P_\ell^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!} P_\ell^m(x) \right.$$

· Propiedades como vectores:

$$\cdot \boxed{\left\{P_\ell^m(x)\right\}_{\ell=0}^{\ell=+\infty}}$$ es una base propia del operador $Ly \equiv \dfrac{d}{dx}\left[(1-x^2)\dfrac{dy}{dx}\right] - \dfrac{\overset{\in\{-\ell,\dots,\ell\}}{m^2}}{1-x^2}y$,

m se fija, el ℓ luego varía

$\text{dom}\, L = \{y \in C^2[-1,1] \,/\, y(-1) \text{ regular},\ y(1) \text{ regular}\}$,

de valor propio $-\ell(\ell+1)$

· Así, es ortogonal para m fijo respecto al producto escalar canónico:

$$\boxed{\int_{-1}^{1} P_l^m(x)\, P_{l'}^m(x)\, dx = \delta_{ll'}\, \frac{2}{2l+1}\, \frac{(l+m)!}{(l-m)!}}$$

DELTA DE DIRAC

· Es un objeto matemático que sólo tiene sentido dentro de una integral. Se define como aquello que cumple:

$$\int_I dx\,\delta(x) f(x) = \begin{cases} f(0) & \text{si } 0\in I \\ 0 & \text{si } 0\notin I \end{cases} \iff \boxed{\int_I dx\,\delta(x-x_0) f(x) = \begin{cases} f(x_0) & \text{si } x_0\in I \\ 0 & \text{si } x_0\notin I \end{cases}}$$

· Hay una serie de propiedades interesantes:

$$\boxed{\delta(x-x_0) f(x) = \delta(x-x_0) f(x_0)}$$

La integral sólo depende del valor de f en x_0

Demostración: $\int_I dx\,\delta(x-x_0) f(x) = \int_I dx\,\delta(x-x_0) f(x_0)$

Como δ va a estar siempre en integrales, usar una expresión u otra es indiferente

$$\boxed{\frac{d}{dx}\theta(x-x_0) = \delta(x-x_0)}$$

Regla de la cadena: $\frac{d}{dx}\theta(x-x_0) = \frac{d}{d(x-x_0)}\theta(x-x_0)\cdot\frac{d(x-x_0)}{dx}$

Demostración 1: $\int_{-\infty}^{\infty} dx\cdot\left[\frac{d}{dx}\theta(x-x_0)\right] f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\cdot\left[\frac{d}{d(x-x_0)}\theta(x-x_0)\right] f(x) =$

$$= -\int_{-\infty}^{\infty} dx\cdot\left[\frac{d}{dx_0}\theta(x-x_0)\right] f(x) = -\frac{d}{dx_0}\int_{-\infty}^{\infty} dx\,\theta(x-x_0) f(x) = -\frac{d}{dx_0}\int_{x_0}^{\infty} dx\, f(x) =$$

$$\frac{d}{dx_0}\theta(x-x_0) = \frac{d\theta(x-x_0)}{d(x-x_0)}\underbrace{\frac{d(x-x_0)}{dx_0}}_{=-1}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{d\theta(x-x_0)}{d(x-x_0)} = -\frac{d}{dx_0}\theta(x-x_0)$$

$$= -\frac{d}{dx_0}\left[F(x)\right]_{x_0}^{\infty} = \frac{dF(x_0)}{dx_0} = f(x_0)$$

f nula

Es decir, $\int_{-\infty}^{\infty} dx\cdot\left[\frac{d}{dx}\theta(x-x_0)\right] f(x) = f(x_0) \overset{\text{def}}{\iff} \frac{d}{dx}\theta(x-x_0) = \delta(x-x_0)$

Demostración 2:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\frac{d}{dx}\theta(x-x_0)\right] f(x) \overset{\text{Luego por partes}}{=}$$

$$= \left[\theta(x-x_0) f(x)\right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \theta(x-x_0) f'(x) = -\int_{x_0}^{\infty} dx\, f'(x) \overset{\text{Barrow}}{=} f(x_0)$$

→ En $-\infty$, θ vale 0

→ En ∞, f se anula por mates

$$\text{En resumen, } \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\frac{d}{dx}\theta(x-x_0)\right] f(x) = f(x_0) \overset{\text{Def.}}{\Longleftrightarrow} \frac{d}{dx}\theta(x-x_0) = \delta(x-x_0)$$

- $\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)$ → se hace el cambio $ax=t$ y se tiene cuidado con los límites de integración si $a<0$
- $[\delta(x)] = \frac{1}{[x]}$
- $\boxed{\delta(-x) = \delta(x)}$

Demostración:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \delta(-x) f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \delta(-x) f(0) = \left| \begin{matrix} -x = t \\ dx = -dt \end{matrix} \right| = -\int_{\infty}^{-\infty} dt\, \delta(t) f(0) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dt\, \delta(t) f(0) = f(0)$$

$$\text{Así, } \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \delta(-x) f(x) = f(0) \overset{\text{Def.}}{\Longleftrightarrow} \delta(-x) = f(x)$$

- Para operar con δ, se puede sumar, multiplicar... con funciones normales (de hecho, $0 \cdot \delta = 0$). Hasta se puede derivar, siendo su derivada algo que no tiene que ver con δ:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \delta'(x-x_0) f(x) = -f'(x_0)$$

Lo que no se puede hacer es trabajar con δ^2.

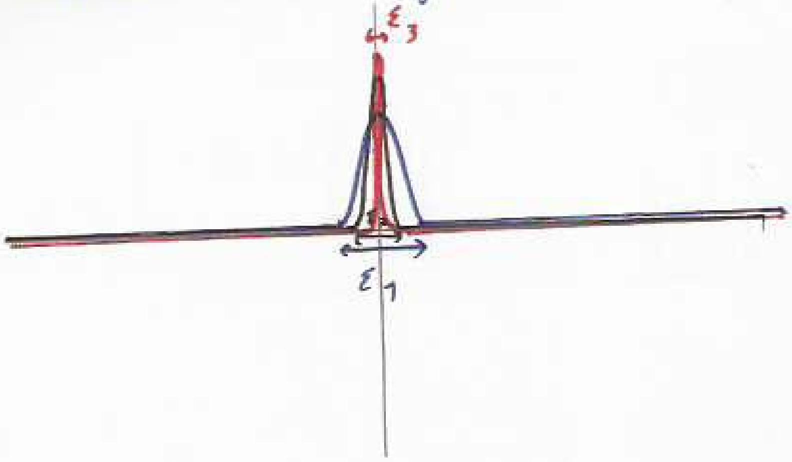
- A la hora de resolver ecuaciones diferenciales con $\delta(x)$, puede ser útil aplicar la 1ª propiedad, tratarlo como un término inhomogéneo y buscar soluciones del estilo $f(x)\theta(x)$

- Físicamente, la idea de la δ es la idea de una carga puntual, de un impulso instantáneo...

La densidad de carga

Matemáticamente, una primera aproximación es considerar una sucesión de funciones de soporte ε, e integral 1:

$$\int_{\mathbb{R}} dx\, f_{\varepsilon}(x) = 1 \quad \forall \varepsilon$$



Al tomar el límite $\varepsilon \to 0$, se obtiene la δ.

- Más rigurosamente, $\int_{\mathbb{R}} dx\, \delta(x)$ es lo que matemáticamente se conoce como distribución: una aplicación $V \longrightarrow \mathbb{R}$ lineal, con V un espacio de funciones.

La teoría de distribuciones generaliza el concepto de función y, mediante "integración por partes", permite derivar cualquier función integrable: por eso la derivada de Θ (función) es δ (distribución); por eso la derivada de δ es otra distribución δ'.

Así, a la hora de derivar "infinitos" o "cosas no derivables", sólo se puede hacer integrando por partes.