PROBLEMAS INHOMOGÉNEOS: DISCUSIÓN

· Vamos a discutir $Lf = g$.

· En álgebra de espacios vectoriales finitos euclídeos, la discusión del problema $A\mathbf{v} = \mathbf{w}$ se puede hacer analizando dicho problema en una base ortogonal propia $\{e_i\}$:

$$\mathbf{v} = \sum_i v_i e_i \;;\quad A\mathbf{v} = \sum_i \lambda_i v_i e_i$$

$$\mathbf{w} = \sum_i w_i e_i$$

Así, $A\mathbf{v} = \mathbf{w} \iff \sum_i \lambda_i v_i e_i = \sum_i w_i e_i$. Aquí hay dos posibilidades:

0 no es valor propio $\iff rg(A) = n$

· $\lambda_i \neq 0 \ \forall i$:

$$A\mathbf{v} = \mathbf{w} \iff \lambda_i v_i = w_i \ \forall i$$

$$\Updownarrow$$

$$v_i = \frac{w_i}{\lambda_i} \ \forall i$$

Es decir, el problema tiene solución única

· $\exists j$ tq $\lambda_j = 0$: $A\mathbf{v} = \mathbf{w} \iff \lambda_i v_i = w_i \ \forall i$

Ahora hay que considerar dos casos:

· $i \neq j \Rightarrow v_i = \frac{w_i}{\lambda_i}$

· $i = j \Rightarrow 0 = w_j$. Por tanto, hay dos posibilidades:

- $w_j \neq 0$: como hemos llegado a un absurdo, $\nexists$ solución

- $w_j = 0$: la j-ésima ecuación no nos añade información. Por tanto, v_j es libre y hay infinitas soluciones

· Si estoy en un espacio de Hilbert, el razonamiento es idéntico. Por tanto, para nuestro problema:

Teorema: sea L un operador diferencial lineal hermítico. Entonces, el problema $Lf = g$:

Con probar que en término análogo particular tiene $\boxed{\text{una}}$ solución, ya se prueba que 0 no es valor propio

· Tiene solución única $\Longleftrightarrow$ 0 no es valor propio de L

subespacio propio asociado al valor propio 0

· No tiene solución $\Longleftrightarrow$ 0 es valor propio de L y $\exists\, y_0 \in V(0)$ tq $\langle y_0, g \rangle_\rho \neq 0$

· Tiene infinitas soluciones $\Longleftrightarrow$ 0 es valor propio de L y $\forall\, y_0 \in V(0)$, $\langle y_0, g \rangle_\rho = 0$

PROBLEMAS INHOMOGÉNEOS: RESOLUCIÓN

· Vamos de nuevo a la analogía algebraica. Hay, básicamente, 3 maneras de resolver $A\mathbb{v} = \mathbb{w}$:

1- A pelo: se resuelve el sistema de ecuaciones, por ejemplo, por el método de Gauss.

2- Usar la base propia: $\mathbb{v} = \sum_i \dfrac{\langle e_i, \mathbb{w} \rangle}{\lambda_i \langle e_i, e_i \rangle} e_i$

si $\exists i$ tq $\lambda_i = 0$ puede que v_i sea libre o no haya solución, como ya hemos visto

3- Invertir el operador: si $\exists!$ solución (y sólo en ese caso), $\exists A^{-1}$, y $\mathbb{v} = A^{-1}\mathbb{w}$ (A^{-1} cumple $AA^{-1} = id$)

· Hay, por tanto, 3 maneras de resolver un problema inhomogéneo $Lf = g$:

1 – Directamente: resuelvo la EDO inhomogénea, impongo las C.C., y listo.

Las C.C. pueden ser redundantes (infinitas soluciones) o incluso incompatibles ($\nexists$ solución), pero el problema está resuelto.

2 – Usar la base propia: se busca una base ortogonal de vectores propios $\{y_i\}$:

$$\boxed{f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle y_i , g \rangle_\rho}{\lambda_i \langle y_i , y_i \rangle_\rho} y_i}$$

si $\exists i$ tq $\lambda_i = 0$, puede que f_i sea libre (si hay infinitas soluciones) o no haya solución; como se ha visto al discutir.

3 – Buscar un operador inverso: el método sólo vale si $\exists!$ solución. Se trata del siguiente apartado: función de Green.