FUNCIÓN DE GREEN

· Sea el problema $Lf = g$, de <u>solución única</u>. Nos interesa buscar un operador L^{-1} tal que $f = L^{-1} g \; \forall g$. Como L es un operador diferencial, es de esperar que L^{-1} sea un operador integral.

· Es decir, busco que $\forall g$:

$$f(x) = \int_a^b \underbrace{d\xi}_{\text{Sin peso}} \, G(x,\xi)\, g(\xi)$$

. A G se le conoce como <u>función de Green</u>.

con $[a,b]$ el intervalo del dominio de $L \Rightarrow$ $\boxed{\xi \text{ es una otra var. } \mathrm{y}\ \ell}$

Vamos a buscar otra expresión para la función de Green:

$$L_x f = g$$

En L hay derivadas con respecto a x

$$\Updownarrow$$

$$L_x \int_a^b d\xi \, G(x,\xi)\, g(\xi) = g(x)$$

$\Updownarrow$ → L_x es lineal y la integral es con respecto a ξ

$$\int_a^b d\xi \left[L_x \, G(x,\xi)\right] g(\xi) = g(x)$$

$\Updownarrow$ Def. y $x \in [a,b]$ → Sería $\delta(\xi - x)$ pero δ es par

$$\boxed{L_x\left[G(x,\xi)\right] = \delta(x-\xi)}$$

· Vamos ya a calcular $G(x,\xi)$

SERIES

· Sea $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ la base ortogonal propia asociada al operador L, con $\{\lambda_n\}$ el conjunto de valores propios:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n}\frac{\langle y_n,g\rangle_\rho}{\langle y_n,y_n\rangle_\rho}\,y_n(x)\underset{\text{Desarrollo}}{=}\int_a^l d\xi\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n}\frac{y_n(x)}{\langle y_n,y_n\rangle_\rho}\rho(\xi)\overline{y_n(\xi)}\right]g(\xi)$$

$$\langle y_n,g\rangle_\rho=\int_a^l d\xi\,\overline{y_n(\xi)}\,g(\xi)\,\rho(\xi)$$

Así, por nuestra primera definición de función de Green:

$$\boxed{G(x,\xi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n}\frac{y_n(x)}{\langle y_n,y_n\rangle_\rho}\rho(\xi)\overline{y_n(\xi)}}$$

RESOLUCIÓN DE $LG=\delta$

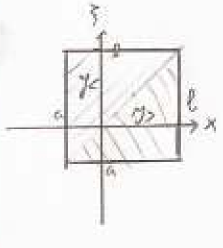
· A partir de ahora, L será un operador de 2° orden.

· Como el término inhomogéneo es una δ, para $x\neq\xi$ tengo la EDO homogénea. Por tanto, luego Variación de constantes:

Sean y_1 e y_2 dos soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea. (sin C.C.)

Entonces:

$$\boxed{G(x,\xi)=\begin{cases}\overbrace{A(\xi)\,y_1(x)+B(\xi)\,y_2(x)}^{\equiv\, y_<(x,\xi)} & \text{si } (a\le)\,x\le\xi\,(\le l)\\[2ex] \underbrace{C(\xi)\,y_1(x)+D(\xi)\,y_2(x)}_{\equiv\, y_>(x,\xi)} & \text{si } (a\le)\,\xi\le x\,(\le l)\end{cases}}$$



A, B, C y D se sacan imponiendo: (Nos queda un conjunto de ecuaciones algebraicas lineales en A, B, C y D)

Útil en sutilidad lo que queremos

1°- Continuidad a $x=\xi \iff \boxed{y_<(\xi,\xi)=y_>(\xi,\xi)}$ → Para que en $\partial_x G$ no haya una δ que nos acarrearía una δ' a $\partial_x^2 G$

2°- Condiciones de contorno → Pues $LG=\delta$ implica que cumple la EDO y las C.C.

3°- Condición de salto $\iff \boxed{a_0(\xi)\left[\frac{\partial}{\partial x}y_>(x,\xi)-\frac{\partial}{\partial x}y_<(x,\xi)\right]_{x=\xi}=1}$ → Luego el coeficiente de la δ sea un 1

RESOLUCIÓN DIRECTA DE $LG=\delta$ (útil si la EDO es bonita)

- Hay algunas ecuaciones diferenciales que se pueden integrar directamente, cosas del estilo:

$$\frac{d}{dx}\left[F(x)y'\right]$$

- De hecho, cualquier ecuación del estilo: $a_0(x)y'' + a_1(x)y'$ (sin término en y) se puede poner en esta forma sin más que multiplicar por el peso ρ que tiene asociado como operador de Sturm-Liouville: queda $\frac{d}{dx}\left[\rho(x)\,a_0(x)\,y'\right]$. Ojo porque esto cambia el operador (véase ejemplo 2).
- Así, teniendo en cuenta las siguientes propiedades de la δ:

$$\frac{d}{dx}\left[\theta(x-\xi)\right] = \delta(x-\xi)$$

$$\delta(x-\xi)\,f(x) = \delta(x-\xi)\,f(\xi)$$

Se puede integrar directamente $L_x G(x,\xi) = \delta(x-\xi)$, donde las posibles constantes de integración quedan fijas por las condiciones de contorno.

PROPUESTA DE SOLUCIONES (útil si las condiciones de contorno son bonitas ⟺ no involucran derivadas)

- Se prueba $\boxed{G(x,\xi) = g(x)\,\theta(x-\xi) + h(x)}$, con g y h soluciones de la homogénea que cumplen:
  - $g(\xi) = 0$ → Para evitar δ'
  - $a_0(\xi)\,g'(\xi) = 1$ → Para que el coeficiente de δ sea 1
  - h se saca imponiendo condiciones de contorno (lo más delicado es bonito)

<u>Justificación</u>: $L_x G = L_x\left[g\,\theta(x-\xi)\right] + \cancel{L_x h(x)}^{\,0 \text{ por ser } h \text{ solución de la homogénea}}$

$L_x G = a_0(x)\cdot\partial_x^2\, g(x)\theta(x-\xi) + a_1(x)\,\partial_x\, g(x)\theta(x-\xi) + a_2(x)g(x)\,\theta(x-\xi) =$

Así,

$$= a_0(x)\partial_x\Big[\underbrace{g(x)\,\delta(x-\xi)}_{\substack{\text{Debe ser 0 para evitar}\\ \delta' \iff g(\xi)=0}} + g'(x)\,\theta(x-\xi)\Big] + a_1(x)\,g(x)\,\delta(x-\xi) + a_1(x)\,g'(x)\,\theta(x-\xi) + a_2(x)g(x)\theta(x-\xi) =$$

$$\overset{g(\xi)=0}{=} \underbrace{a_0(x)\,g'(x)}_{\text{Debe ser 1}}\,\delta(x-\xi) + \theta(x-\xi)\,\overbrace{\left[a_0(x)g''(x) + a_1(x)\,g'(x) + a_2(x)\,g(x)\right]}^{0 \text{ por ser } g \text{ solución de la homogénea}} = \delta(x-\xi)$$

COMPROBACIONES $\Rightarrow$ OBLIGATORIAS

- En la medida de lo posible, comprobar aquello que hemos impuesto. En particular, es sencillo comprobar:

  - Se cumplen condiciones de contorno
  - $G(x,\xi)$ es continua en $x=\xi$

- Por otra parte, dada la estructura en forma de serie, es fácil ver que: (ya que viene probado de elegir $\{y_n\}(x)$)

$$\boxed{\frac{1}{\rho(\xi)}\, G(x,\xi) \text{ es simétrica respecto al intercambio } x \longleftrightarrow \xi}$$

↳ $\rho(\xi) \propto \frac{1}{a_0(\xi)}\, e^{\int^{\xi} \frac{a_1(t)}{a_0(t)}\, dt}$

Para esto, es útil la propiedad:

$$\theta(x-\xi) = 1 - \theta(\xi - x)$$

- Si hay tiempo, se puede comprobar $LG = \delta$

Ejemplo 1:

$Ly = y''$; $y(0) = y(\pi) = 0$

Vamos a seguir el método sistemático: la ecuación homogénea es $y'' = 0$, siendo dos soluciones L.I.

$y_1 = 1$; $y_2 = x$. Así:

$$G(x,\xi) = \begin{cases} A(\xi) + B(\xi)x & \text{si } 0 \le x \le \xi \le \pi \\ C(\xi) + D(\xi)x & \text{si } 0 \le \xi \le x \le \pi \end{cases}$$

. Continuidad en $x = \xi$:

$$A + B\xi = C + D\xi$$

. Condiciones de contorno:

- Si $x = 0$, como $\xi \in [0,\pi]$, $\xi \ge x$; por lo que se aplica la expresión de arriba:

$$A = 0$$

- Si $x = \pi$, como $\xi \in [0,\pi]$, $\xi \le x$; y se toma la expresión de abajo:

$$C + D\pi = 0$$

. Salto:

$$1 \cdot \left[\frac{\partial}{\partial x} \left[C(\xi) + D(\xi)x \right] - \frac{\partial}{\partial x} \left[A(\xi) + B(\xi)x \right] \right]_{x=\xi} = 1$$

$$D - B = 1$$

Así, mis ecuaciones son:

$$\begin{cases} A = 0 \\ B\cdot\xi - C - D\cdot\xi = 0 \\ C + D\cdot\pi = 0 \\ -B + D = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = \dfrac{\xi - \pi}{\pi} \\ C = -\xi \\ D = \dfrac{\xi}{\pi} \end{cases}$$

Por tanto:

$$\boxed{G(x,\xi)=\begin{cases}\frac{\xi-\pi}{\pi}\,x & \text{si } 0\le x\le \xi\le\pi\\ \frac{x-\pi}{\pi}\,\xi & \text{si } 0\le \xi\le x\le\pi\end{cases}}$$

Comprobacion:

· C.C.:

- Si $x=0$, hay que tomar la expresión de arriba y $G=0$
- Si $x=\pi$, hay que tomar la expresión de abajo y $G=0$

· Continuidad: si hago $x=\xi$, tanto arriba como abajo obtengo $\frac{x-\pi}{\pi}x$

· Simetría: en este caso, $p=1$. Si intercalo x y ξ me queda:

$$G(\xi,x)=\begin{cases}\frac{x-\pi}{\pi}\,\xi & \text{si } \xi\le x\\ \frac{\xi-\pi}{\pi}\,x & \text{si } x\le\xi\end{cases}$$

que es justamente la expresión de $G(x,\xi)$ → Al intercalar x por ξ lo de arriba se convierte en lo de abajo

Resolución de $Lf=g$: → INTERESANTE

Tomo $g(x)=x$

$f(x)=\int_0^\pi d\xi\; G(x,\xi)\cdot\xi$. Ahora, como G está dado a trozos, habrá que separar la integral:

ξ varía entre 0 y π. Ahora bien, la expresión de G es diferente dependiendo de si $\xi\le x$ o $\xi\ge x$. Nótese que aquí x es un mero parámetro que no interviene

$$f(x)=\int_0^x d\xi\;\frac{x-\pi}{\pi}\xi\cdot\xi+\int_x^\pi d\xi\;\frac{\xi-\pi}{\pi}x\cdot\xi=(\dots)=\frac{1}{6}x(x^2-\pi^2)$$

Por último, vamos a comprobar $LG = \delta$

Para eso, conviene escribir compactamente G:

$$G(x,\xi) = \underbrace{\Theta(\xi-x)}_{\text{será } 1 \iff \xi - x \geq 0 \iff \xi \geq x} \cdot \frac{\xi-\pi}{\pi}x + \Theta(x-\xi)\cdot\frac{x-\pi}{\pi}\xi = \left(1-\Theta(x-\xi)\right)\frac{\xi-\pi}{\pi}x + \Theta(x-\xi)\frac{x-\pi}{\pi}\xi =$$

$$= \frac{\xi-\pi}{\pi}x + \Theta(x-\xi)\frac{(x-\pi)\xi - (\xi-\pi)x}{\pi} = \frac{\xi-\pi}{\pi}x + \Theta(x-\xi)\frac{\cancel{x\xi} - \xi\pi - \cancel{\xi x} + \pi x}{\pi} =$$

$$= \frac{\xi-\pi}{\pi}x + \Theta(x-\xi)\cdot(x-\xi)$$

Debería cumplirse $\frac{\partial^2}{\partial x^2}G(x,\xi) = \delta(x-\xi)$

$$\frac{\partial}{\partial x}G(x,\xi) = \frac{\xi-\pi}{\pi} + \underbrace{\delta(x-\xi)\cdot(x-\xi)}_{\delta(x-\xi)\cdot(\xi-\xi)=0} + \Theta(x-\xi)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}G(x,\xi) = \delta(x-\xi), \text{ C.Q.D.}$$

Ejemplo 2:

$$Ly = y'' - 2\operatorname{tg} x \, y' \ ; \ y(0)=0; \ y'(\pi/4)=0$$

Al no haber término en y, puede ser útil multiplicar por el peso:

$$\rho(x) = \frac{1}{a_0(x)} e^{\int^x \frac{a_1(t)}{a_0(t)} dt} = e^{-2\int^x \operatorname{tg} t \, dt} = e^{-2\int^x \frac{\sin t}{\cos t} dt} =$$

$$= e^{2 \ln|\cos x|} = e^{\ln(\cos^2 x)} = \cos^2 x$$

Así, $Ly = g \iff \cos^2 x \, y'' - 2\operatorname{tg} x \cos^2 x \, y' = g(x) \cdot \cos^2 x$ $\Rightarrow$ Ojo, habrá que multiplicar el término inhomogéneo por $\cos^2 x$ al integrar

Por tanto, tengo un nuevo operador, dado por: $L'y = \frac{d}{dx}\left[\cos^2 x \, y'\right]$

$$L'G = \delta \iff \frac{\partial}{\partial x}\left[\cos^2 x \, \partial_x G(x,\xi)\right] = \delta(x-\xi)$$

Integro entre $\pi/4$ y x para aprovechar la C.C.:

$$\int_{\pi/4}^{x} \frac{\partial}{\partial x}\left[\cos^2 x \, \partial_x G(x,\xi)\right] dx = \int_{\pi/4}^{x} \delta(x-\xi) \, dx$$

$$\cos^2 x \frac{\partial}{\partial x} G(x,\xi) - \cos^2\frac{\pi}{4} \cdot \underbrace{\cancel{\frac{\partial}{\partial x} G(x,\xi)\Big|_{x=\pi/4}}}_{0 \text{ por la C.C.}} = \theta(x-\xi) - \underbrace{\theta\left(\frac{\pi}{4}-\xi\right)}_{\text{Como } \xi\in[0,\frac{\pi}{4}],\ \frac{\pi}{4}-\xi\geq 0 \text{ y la } \theta \text{ vale } 1}$$

$$\cos^2 x \frac{\partial}{\partial x} G(x,\xi) = \theta(x-\xi) - 1$$

$$\frac{\partial}{\partial x} G(x,\xi) = \frac{\theta(x-\xi)}{\cos^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x}$$

Integro entre 0 y x para aprovechar la C.C.:

$$\int_0^x \frac{\partial}{\partial x} G(x,\xi)\, dx = \int_0^x \cos^2 x\, \theta(x-\xi)\, dx - \int_0^x \cos^2 x\, dx$$

Ahora:

$$\cdot \int_0^x \frac{\partial}{\partial x} G(x,\xi)\, dx = G(x,\xi) - \cancel{G(0,\xi)}^{\,0}$$

$$\cdot \int_0^x \frac{1}{\cos^2 x}\, dx = tg\, x - tg\, 0 = tg\, x$$

El límite de integración, no la variable

$$\cdot \int_0^x \frac{1}{\cos^2 x}\, \theta(x-\xi)\, dx \rightarrow$$ Necesito distinguir cuándo es $x < \xi$ y cuándo $x > \xi$

la variable de integración, al ser siempre menor que x, no es ser siempre menor que ξ

$$\cdot \text{ Si } x \leq \xi \Rightarrow \int_0^x 0\, dx = 0$$

ojo, entre 0 y ξ el integrando vale 0 y entre ξ y x vale $\frac{1}{\cos^2 x}$

$$\cdot \text{ Si } x \geq \xi \Rightarrow \int_\xi^x \frac{1}{\cos^2 x}\, dx = tg\, x - tg\, \xi$$

$$\text{Así, } \int_0^x \frac{1}{\cos^2 x}\, \theta(x-\xi)\, dx = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq \xi \\ tg\, x - tg\, \xi & \text{si } x \geq \xi \end{cases} = (tg\, x - tg\, \xi)\, \theta(x-\xi)$$

Otra manera más sencilla es hacerlo por partes:

$$\theta(x-\xi) = u; \quad du = \delta(x-\xi)\, dx$$

$$\frac{1}{\cos^2 x}\, dx = dv; \quad v = tg\, x$$

$$\Rightarrow \int_0^x \frac{1}{\cos^2 x}\, \theta(x-\xi) = \Big[tg\, x\, \theta(x-\xi) \Big]_{x=0}^{x=x} -$$

Aquí $\theta = 0$

$$- \int_0^x tg\, x\, \delta(x-\xi)\, dx = tg\, x\, \theta(x-\xi) - tg\, \xi \int_0^x \delta(x-\xi)\, dx =$$

$$= tg\, x\, \theta(x-\xi) - tg\, \xi \Big[\theta(x-\xi) \Big]_{x=0}^{x=x} = (tg\, x - tg\, \xi)\, \theta(x-\xi)$$

Así, $\boxed{G(x,\xi) = -tg\, x + (tg\, x - tg\, \xi)\, \theta(x-\xi)}$. Siguiente la función de Green de mi operador

(al final es mejor)

original: $\boxed{G(x,\xi) = -tg\, x \cos^2\xi + (tg\, x \cos^2\xi - tg\, \xi \cos^2\xi)\, \theta(x-\xi)}$

Comprobación:

· C.C.: - si $x=0$, $\theta=0$ y $tg\,0=0 \Rightarrow G(0,\xi)=0$

$$-\partial_x G(x,\xi) = -\frac{1}{\cos^2 x} + \underbrace{\cancel{(tg\,x - tg\,\xi)\,\delta(x-\xi)}}_{0} + \frac{1}{\cos^2 x}\,\theta(x-\xi) =$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x}\left(-1 + \theta(x-\xi)\right)$$

Si $x=\pi/4$, $\theta=1 \Rightarrow \partial_x G(\pi/4,\xi)=0$

· Continuidad: si $x=\xi$, el coeficiente de la θ se anula, por lo que todo lo que podría ser discontinuo es 0.

· Simetría:

si operador es ahora: $\cos^2 x\, y'' - 2\,\text{sen}\,x \cos x\, y'$

así que el peso: $\rho(\xi) = \frac{1}{\cos^2\xi}\, e^{-2\int^{\xi} \frac{\text{sen}\,x}{\cos x} dx} = \frac{1}{\cos^2\xi}\cdot \cos^2\xi = 1 \Rightarrow$ El peso ahora la unidad

$$G(\xi,x) = -tg\,\xi + \theta(\xi-x)(tg\,\xi - tg\,x) = -tg\,\xi + tg\,\xi - tg\,x - \theta(x-\xi)(tg\,\xi - tg\,x) =$$

$$= -tg\,x + \theta(x-\xi)(tg\,x - tg\,\xi) = G(x,\xi)$$

· $L'_x G = \delta$:

$$L'_x G = \frac{\partial}{\partial x}\left[\cos^2 x\,\frac{\partial}{\partial x} G(x,\xi)\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[\cos^2 x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}(\theta(x-\xi)-1)\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[\theta(x-\xi)-1\right] =$$

$$= \delta(x-\xi)$$

· Resolución de $Lf=g$: como se ha dicho antes, $Lf=g \Leftrightarrow L'f = g\cdot\cos^2 x$

Es de Green del operador original

Así $f = \int_0^{\pi/4} d\xi\, G(x,\xi)\cdot g(\xi)\cdot \cos^2\xi = \int_0^{\pi/4} d\xi\, g(\xi)\cos^2\xi\left[-tg\,x + \theta(x-\xi)(tg\,x - tg\,\xi)\right]$

De nuevo, hay que separar, pues θ valdrá diferente si $x>\xi$ o $x<\xi$:

$$f(x) = -\int_0^x d\xi\, g(\xi)\cos^2\xi\, tg\,\xi - \int_x^{\pi/4} d\xi\, g(\xi)\cos^2\xi\, tg\,x$$

Ejemplo 3:

$$Ly = x^2y'' + 2xy' + \frac{1}{4} \; ; \; y(1) = y(e) = 0$$

La ecuación homogénea es: $x^2y'' + 2xy' + \frac{1}{4} = 0$

Equidimensional a $x \Rightarrow$ Pruebo $y = x^{\mu}$: $\mu(\mu-1) + 2\mu + \frac{1}{4} = 0$

$$\mu^2 + \mu + \frac{1}{4} = 0$$

$(\mu + \frac{1}{2})^2 = 0$; $\mu = -\frac{1}{2}$. La otra solución se obtiene multiplicando por $\ln x$

Así, $y_H = \frac{1}{\sqrt{x}}(A + B\ln x)$

Pruebo $G(x,\xi) = g(x)\,\Theta(x-\xi) + f(x)$. Vayamos a g:

- Se anula en $x = \xi \Rightarrow g = \frac{B}{\sqrt{x}}\ln\frac{x}{\xi}$ (Tomando $A = -B\ln\xi$)

- $a_0(\xi)g'(\xi) = 1 \Leftrightarrow \xi^2 B\left[\frac{\sqrt{\xi}\frac{1}{\xi} - \cancel{\ln\frac{\xi}{\xi}\cdot\frac{1}{2}\xi^{-1/2}}}{\xi}\right] = 1$

$$\xi^2 \cdot \frac{1}{\xi} \cdot \frac{1}{\xi^{1/2}} \cdot B = 1 \; ; \; \xi^{1/2}B = 1 \; ; \; B = \frac{1}{\sqrt{\xi}}$$

$$G(x,\xi) = \frac{1}{\sqrt{x\xi}}\ln\frac{x}{\xi}\,\Theta(x-\xi) + \frac{1}{\sqrt{x}}(C + D\ln x)$$

Impongo C.C.:

- Si $x = 1$, como $\xi \in [1,e]$, $x - \xi \leq 0 \Rightarrow \Theta(x-\xi) = 0$. Así, $G(1,\xi) = \frac{1}{1}(C + D\ln 1) = \underline{C = 0}$

$$\Downarrow$$

$$G(x,\xi) = \sqrt{\frac{\xi}{x}}\ln\frac{x}{\xi}\,\Theta(x-\xi) + D\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$$

- Si $x = e$, $\Theta(x-\xi) = 1$: $G(e,\xi) = \frac{1}{\sqrt{e\xi}}[\ln e - \ln\xi] + D\frac{\ln e}{\sqrt{e}} = 0$

$$\frac{1}{\sqrt{\xi}}[1 - \ln\xi] + D = 0 \; ; \; D = \frac{1}{\sqrt{\xi}}(\ln\xi - 1)$$

$$\boxed{G(x,\xi) = \frac{1}{\sqrt{x\xi}}\ln\frac{x}{\xi}\,\Theta(x-\xi) + \frac{1}{\sqrt{x\xi}}(\ln\xi - 1)\ln x}$$

Comprobación:

· C.C.: · Si $x=1$, $\theta(x-\xi)=0$ y tengo $\frac{1}{\sqrt{x\xi}}(\ln\xi-1)\ln 1=0$

· Si $x=e$, $\theta(x-\xi)=1$ y tengo $\frac{1}{\sqrt{e\xi}}\left[\ln e-\ln\xi+(\ln\xi-1)\ln e\right]=$

$$=\frac{1}{\sqrt{e\xi}}\left[1-\ln\xi+\ln\xi-1\right]=0$$

· Continuidad: Si $x=\xi$, $\ln\frac{x}{\xi}=0$, y la parte discontinua (con θ) se va

· Simetría: el peso es: $\rho(\xi)=\frac{1}{\xi^2}e^{2\int^{\xi}\frac{1}{t}dt}=\frac{1}{\xi^2}e^{2\ln\xi}=\frac{1}{\xi^2}\cdot\xi^2=1$

Así, $G(\xi,x)$ debería ser $G(x,\xi)$:

$$G(\xi,x)=\frac{1}{\sqrt{\xi x}}\ln\frac{\xi}{x}\,\theta(\xi-x)+\frac{1}{\sqrt{\xi x}}(\ln x-1)\ln\xi=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\xi x}}\left[\ln\frac{\xi}{x}-\ln\frac{\xi}{x}\theta(x-\xi)+\ln\xi\ln x-\ln\xi\right]=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x\xi}}\ln\frac{x}{\xi}\,\theta(x-\xi)+\frac{1}{\sqrt{x\xi}}\left[\cancel{\ln\xi}-\ln x+\ln\xi\ln x\cancel{-\ln\xi}\right]=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x\xi}}\ln\frac{x}{\xi}\,\theta(x-\xi)+\frac{1}{\sqrt{x\xi}}(\ln\xi-1)\ln x=G(x,\xi)$$

· g y h son solución de la homogénea, tal y como hemos pedido

Resolución de $Lf=g$: el proceso es análogo al ejemplo anterior:

$$f=\int_1^e d\xi\,\frac{1}{\sqrt{x\xi}}\left[(\ln\xi-1)\ln x+\ln\frac{x}{\xi}\theta(x-\xi)\right]g(\xi)=$$

$$=\int_1^x d\xi\frac{1}{\sqrt{x\xi}}\left[\ln\xi\ln x\cancel{-\ln x}\cancel{+\ln x}-\ln\xi\right]g(\xi)+\int_x^e d\xi\,\frac{1}{\sqrt{x\xi}}(\ln\xi-1)\ln x\;g(\xi)=$$

$$=\int_1^x d\xi\,\frac{1}{\sqrt{x\xi}}\ln\xi(\ln x-1)g(\xi)+\int_x^e d\xi\,\frac{1}{\sqrt{x\xi}}\ln x(\ln\xi-1)g(\xi)$$

RESOLVENTE

- Se define como la función de Green del operador $L-\lambda\,id$, G_λ.
- Es, a su vez, una función de λ, que tiene una serie de maravillosas propiedades:

> - Las singularidades (como función de λ) son los valores propios de L
> - Si λ_n es un valor propio, $\lim_{\lambda\to\lambda_n}(\lambda_n-\lambda)G_\lambda = A(\xi)\,y_n(x)$, con
>   - y_n la correspondiente función propia (normalizada) La cte multiplicativa se considera parte de y_n
>   - $A(\xi)$ una función que cumple $\rho(\xi) = \dfrac{A(\xi)}{\overline{y_n(\xi)}}$

Demostración:

Los valores propios de $(L-\lambda\,id)$ son, porque estoy restando la identidad, los valores propios de $L-\lambda$, siendo las funciones propias las mismas. Así, usando la fórmula en serie de la función de Green:

$\{\lambda_k\}$ $\{y_k\}$

$$G_\lambda(x,\xi)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k-\lambda}\,\frac{y_k(x)}{\langle y_k,y_k\rangle_\rho}\,\rho(\xi)\,\overline{y_k(\xi)}$$

Como función de λ, esto tiene singularidades en $\lambda=\lambda_n$ (a los valores propios de L)

Es más, $\lim_{\lambda\to\lambda_n}(\lambda_n-\lambda)G_\lambda = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\lim_{\lambda\to\lambda_n}\frac{\lambda_n-\lambda}{\lambda_k-\lambda}\right)\frac{y_k(x)}{\langle y_k,y_k\rangle_\rho}\,\rho(\xi)\,\overline{y_k(\xi)} =$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\delta_{nk}\,\frac{y_k(x)}{\langle y_k,y_k\rangle_\rho}\,\rho(\xi)\,\overline{y_k(\xi)} = \underbrace{\frac{y_n(x)}{\langle y_n,y_n\rangle_\rho}}_{\text{Función propia normalizada}}\cdot\underbrace{\rho(\xi)\,\overline{y_n(\xi)}}_{A(\xi)}$$

Ejemplo: $Ly = -y''$ $y(0) = y(\pi) = 0$

Quiero la función de Green del operador:

$$L_\lambda = -y'' - \lambda y \quad y(0) = y(\pi) = 0$$

Pruebo $G_\lambda(x,\xi) = g(x)\,\theta(x-\xi) + f(x)$. La solución de la ecuación homogénea

$y'' + \lambda y = 0$ es

- $\underline{\lambda = 0}$: $y_H = Ax + B$. Para g:
  - $g(\xi) = 0 \Leftrightarrow g = A(x-\xi)$
  - $-g'(\xi) = 1$; $A = -1$

$$G_0(x,\xi) = (\xi - x)\,\theta(x-\xi) + Cx + D$$

C.C.:

- En $x=0$, la θ se anula $\Rightarrow \underline{D = 0}$
- En π, luego $\xi - \pi + C\pi = 0$; $\underline{C = \frac{\pi - \xi}{\pi}}$

$$G_0(x,\xi) = (\xi - x)\,\theta(x-\xi) + \frac{\pi - \xi}{\pi}\,x$$

- $\underline{\lambda \neq 0}$: $y_H = A \operatorname{sen}\left[\sqrt{\lambda}\,x + B\right]$. Para g:
  - $g(\xi) = 0 \Rightarrow$ Tomo $y = A \operatorname{sen}\left[\sqrt{\lambda}\,(x-\xi)\right]$
  - $-g'(\xi) = 1$; $-A\sqrt{\lambda}\cos 0 = 1$; $A = -\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$

$$G_\lambda(x,\xi) = -\frac{\operatorname{sen}\left[\sqrt{\lambda}(x-\xi)\right]}{\sqrt{\lambda}}\,\theta(x-\xi) + C \operatorname{sen}\sqrt{\lambda}\,x + D\cos\sqrt{\lambda}\,x$$

CC:

- En $x=0$, θ se anula: $G_\lambda(0,\xi) = \underline{D = 0}$

· En $x=\pi$, tengo:

$$-\frac{\operatorname{sen}\sqrt{\lambda}(\pi-\xi)}{\sqrt{\lambda}}+C\operatorname{sen}\sqrt{\lambda}\pi=0$$

$$C=\frac{\operatorname{sen}\left[\sqrt{\lambda}(\pi-\xi)\right]}{\sqrt{\lambda}\operatorname{sen}\sqrt{\lambda}\pi}$$

Así,

$$\boxed{\begin{aligned} G_\lambda(x,\xi) &= -\frac{\operatorname{sen}\left[\sqrt{\lambda}(x-\xi)\right]}{\sqrt{\lambda}}\theta(x-\xi)+\frac{\operatorname{sen}\left[\sqrt{\lambda}(\pi-\xi)\right]}{\sqrt{\lambda}\operatorname{sen}\sqrt{\lambda}\pi}\operatorname{sen}\sqrt{\lambda}x \\ G_0(x,\xi) &= (\xi-x)\theta(x-\xi)+\frac{\pi-\xi}{\pi}x \end{aligned}}$$

Singularidades:

· En principio parece que $\lambda=0$ es singularidad, pero $\lim_{\lambda\to0}G_\lambda(x,\xi)=$

$$=-(x-\xi)\theta(x-\xi)+\lim_{\lambda\to0}\underbrace{\frac{\operatorname{sen}\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}}}_{\to x}\cdot\underbrace{\frac{\operatorname{sen}\sqrt{\lambda}(\pi-\xi)}{\operatorname{sen}\sqrt{\lambda}\pi}}_{\to\frac{\cancel{\sqrt{\lambda}}(\pi-\xi)}{\cancel{\sqrt{\lambda}}\pi}}=$$

$$=(\xi-x)\theta(x-\xi)+\frac{\pi-\xi}{\pi}x=G_0(x,\xi)\Rightarrow\text{Continuidad en }\lambda=0$$

· El resto de singularidades, que ya sí no nos las quita nadie, son $\operatorname{sen}\sqrt{\lambda}\pi=0 \Leftrightarrow \lambda=n^2$

Así, $\boxed{\text{el conjunto de valores propios es } \lambda_n=n^2\ (n=1,2,\dots)}$

· Al hacer $\lim_{\lambda\to n^2}(n^2-\lambda)G_\lambda$, la parte de θ se nos va, y queda:

$$\lim_{\lambda\to n^2}\frac{(n^2-\lambda)\operatorname{sen}\left[\sqrt{\lambda}(\pi-\xi)\right]}{\sqrt{\lambda}\operatorname{sen}\sqrt{\lambda}\pi}\operatorname{sen}\sqrt{\lambda}x=$$

$$=\lim_{\lambda\to n^2}\underbrace{\frac{(n^2-\lambda)\cancel{\operatorname{sen}\sqrt{\lambda}\pi}\cos\sqrt{\lambda}\xi}{\sqrt{\lambda}\cancel{\operatorname{sen}\sqrt{\lambda}\pi}}\operatorname{sen}\sqrt{\lambda}x}_{\to0}-\lim_{\lambda\to n^2}\frac{(n^2-\lambda)\cos\sqrt{\lambda}\pi\operatorname{sen}\sqrt{\lambda}\xi}{\sqrt{\lambda}\operatorname{sen}\sqrt{\lambda}\pi}\operatorname{sen}\sqrt{\lambda}x \overset{\substack{\text{Límite del producto =}\\\text{producto de límites}}}{=}$$

$$=-(-1)^n\cdot\frac{1}{n}\operatorname{sen}nx\operatorname{sen}n\xi\lim_{\lambda\to n^2}\frac{n^2-\lambda}{\operatorname{sen}\sqrt{\lambda}\pi}\overset{\text{L'Hôpital}}{=}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n}\operatorname{sen}nx\operatorname{sen}n\xi\lim_{\lambda\to n^2}\frac{-1}{(\cos\sqrt{\lambda}\pi)\cdot\pi\cdot\frac{1}{2\sqrt{\lambda}}}=$$

$$= \frac{\cancel{(-1)^n}}{\cancel{n}} \operatorname{sen} nx \operatorname{sen} n\xi \cdot \frac{2 \cdot \cancel{n}}{\cancel{(-1)^n}\,\pi} = \boxed{\underbrace{\frac{2}{\pi} \operatorname{sen} nx}_{\substack{\text{Función propia} \\ \text{normalizada}}}\ \underbrace{\operatorname{sen} n\xi}_{p(\xi)\cdot\overline{y_n(\xi)}}}$$