TEORÍA DE STURM-LIOUVILLE

ESPACIOS DE FUNCIONES Y DESARROLLOS ORTOGONALES

· El problema con el que trabajamos es:

$$L f = g$$

con:

- g una función conocida; $g: I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$
- f la incógnita; $f: I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$
- $L: \mathrm{dom}(L) \longrightarrow V$ un operador diferencial lineal formado por
  $f \longrightarrow F(f)$
  - · Expresión diferencial (F)
  - · Dominio y condiciones de contorno en I

· En álgebra de espacios vectoriales finitos euclídeos, con L autoadjunto, esto tiene solución:

- Sea $\{e_i\}$ la base ortogonal de vectores propios
- Sea $Av = w$ el problema análogo

Desarrollo v y w en la base $\{e_i\}$:

$$v = \sum_i v_i e_i$$

$$w = \sum_i w_i e_i \; ; \text{con } w_i = \frac{\langle e_i, w\rangle}{\langle e_i, e_i\rangle}$$ (obtención inmediata, sin resolver nada)

$$\left.\begin{array}{l} Av = A\sum_i v_i e_i \underset{A \text{ lineal}}{=} \sum_i v_i Ae_i \underset{e_i \text{ ave. prop.}}{=} \sum_i v_i \lambda_i e_i \\ w = \sum_i w_i e_i \end{array}\right\} \Rightarrow v_i = \frac{w_i}{\lambda_i}$$

Habrá solución
$\Updownarrow$
$\det(A) \neq 0$
$\Updownarrow$
$\lambda_i \neq 0 \; \forall i$

Así, resuelto el problema:

$$\boxed{v = \sum_i \frac{\langle e_i, w\rangle}{\lambda_i \langle e_i, e_i\rangle} e_i}$$

- Vamos a ver cómo traducimos esto a conjuntos de funciones.

- El conjunto de funciones dadas por $f: I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, con la definición:

$$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$$

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$$

siempre que estas operaciones sean cerradas (I no puede ser cualquiera), es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial de dimensión infinita (no hay sistema generador finito $\Leftrightarrow \exists$ conjunto libre con el cardinal que tú quieras)

Ejemplos:

$C^2(\mathbb{R})$ es un espacio vectorial

función que vale 0 fuera de un intervalo finito

$C_c(\mathbb{R})$ es un espacio vectorial

$\{f \in C^2[a,b] \,/\, f(a) = f(b)\}$ es un espacio vectorial

$\{f \in C^2[a,b] \,/\, f(a)=0;\ f(b)=1\}$ NO es un espacio vectorial (la suma no es operación interna)

$L^2[a,b] \equiv \left\{ f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{C} \ \text{tq} \ \exists \int_a^b [f(x)]^2 dx \right\}$ es un espacio vectorial

- Por otra parte, también nos hace falta un producto interno. Si el cuerpo es $\mathbb{C}$, hay que pedirle:

$$\boxed{\begin{aligned} &\left.\begin{aligned} &\langle \lambda f, g \rangle = \overline{\lambda} \langle f, g \rangle \ \text{(conjugilineal)} \\ &\langle f, g \rangle = \overline{\langle g, f \rangle} \ \text{(simétrico)} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \langle f, \lambda g \rangle = \lambda \langle f, g \rangle \\ &\langle f+g, h \rangle = \langle f, h \rangle + \langle g, h \rangle \\ &\langle f, f \rangle > 0 \quad \forall f \neq 0 \ \text{(no degenerado)} \end{aligned}}$$

Ejemplos: $V = C^2[a,b]$ (si no pido la no degeneración, $L^2[a,b]$ es infinito)

Producto interno canónico: $\langle f, g \rangle \equiv \int_a^b dx\, \overline{f}(x) g(x)$

con un peso: $\langle f, g \rangle_\rho \equiv \int_a^b dx\, \overline{f}(x) g(x) \rho(x)$; con $\rho > 0$

El peso se puede generalizar: $\int_{[a,b]\times[a,b]} dx\,dy\, \overline{f}(x) K(x,y) g(y)$; con $K > 0$

- Llegamos ya a la definición clave:

<u>Espacio de Hilbert</u>: un espacio de Hilbert es un espacio vectorial de dimensión infinita, con un producto interno y <u>completo</u> con la norma dada por dicho producto interno.

Completo $\Longleftrightarrow$ toda sucesión de Cauchy es convergente. Es decir, si defino $\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$, un espacio V es completo si y sólo si

$\forall$ sucesión $\{f_1, \dots, f_n\}$, converge $\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0$ tq $\forall n > n_0 \; \|f_n - f_{n_0}\| < \varepsilon$

<u>Ejemplos</u>:

$C^2[a,b]$ <u>NO</u> es un espacio de Hilbert

$L^2[a,b]$ <u>SÍ</u> es un espacio de Hilbert

OPERADORES Y BASES PROPIAS

· Para seguir el procedimiento explicado antes necesitamos lo que en dimensión finita era el montaje de operadores autoadjuntos. En general,

$$\boxed{L \text{ se dice hermítico (o simétrico)} \iff \forall f, g \in \mathrm{Dom}(L) \quad \langle f, Lg \rangle_\rho = \langle Lf, g \rangle_\rho}$$

(Nótese que no he asumido que el producto interno es el canónico al añadir un peso)

Los teoremas valen para cualquier operador hermítico: · $\lambda_i \in \mathbb{R}$
· funciones propias ortogonales

· Hay un caso especialmente útil en física: operadores de segundo orden:

$$\boxed{Ly \equiv a_0(x) y'' + a_1(x) y' + a_2(x) y \;;\; \text{ciertas condiciones de contorno en } [a, b]}$$

esto es hermítico para coeficientes reales y sensatos cuando:

· El peso vale $\rho(x) \propto \dfrac{1}{a_0(x)} e^{\int^x dt \frac{a_1(t)}{a_0(t)}}$

· $BT \equiv \left[\rho\, a_0 \left(\bar{f}\, g' - \bar{f}'\, g \right) \right]_a^b = \left[\rho\, a_0\, W[\bar{f}, g] \right]_a^b = 0$

· Lo cual nos permite enunciar (dependiendo de si BT se anulan por separado o se compensan):

· **Teorema 1**: sea L un operador lineal diferencial de 2° orden, con:

· Coeficientes reales y sensatos $\iff \begin{cases} a_0 \in C^2[a, b] \\ a_1 \in C^1[a, b] \\ a_2 \in C[a, b] \end{cases}$

· Condiciones de contorno homogéneas: (porque el Wronskiano se anula a alargarlo)

$$\forall y \in \mathrm{Dom}(L) \begin{cases} \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0 \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0 \end{cases} ; \text{con} \begin{cases} \alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0 \\ \beta_1^2 + \beta_2^2 \neq 0 \end{cases}$$

· $a_0 \neq 0$ en $[a, b]$

entonces:

1- El operador es Hermítico con respecto a $< , >_\rho$; con $\rho(x) \propto \frac{1}{a_0} e^{\int^x dt \frac{a_1(t)}{a_0(t)}}$ ($a_0, \rho > 0$!!)

2- Todos los valores propios de L son reales y acotados superior o bien inferiormente.

3- El conjunto de funciones propias de L, que son no degeneradas (subespacios propios de dimensión 1), forman una base en el espacio de Hilbert $L^2([a,b])_\rho$, ortogonal con respecto a $< , >_\rho$. Se puede elegir una base de funciones reales.

· Teorema 2: sea L un operador lineal diferencial de 2º orden, con:

. Coeficientes reales y suaves $\Longleftrightarrow \begin{cases} a_0 \in C^2[a,b] \\ a_1 \in C^1[a,b] \\ a_2 \in C[a,b] \end{cases}$

. Condiciones de contorno periódicas:

$$\forall y \in Dom(L) \quad \begin{pmatrix} y(b) \\ y'(b) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y(a) \\ y'(a) \end{pmatrix}$$

con $\boxed{\rho(b) a_0(b) |A| = \rho(a) a_0(a)}$

. $a_0 \neq 0$ en $[a,b]$

entonces:

1- El operador es Hermítico con respecto a $< , >_\rho$; con $\rho(x) \propto \frac{1}{a_0} e^{\int^x dt \frac{a_1(t)}{a_0(t)}}$ ($a_0, \rho > 0$!!)

2- Todos los valores propios de L son reales y acotados superior o bien inferiormente

3- El conjunto de funciones propias de L forman una base (que se puede elegir real) en el espacio de Hilbert $L^2([a,b])_\rho$; donde funciones propias asociadas a valores propios diferentes son ortogonales entre sí con respecto a $< , >_\rho$. Puede haber degeneración, como mucho de orden 2 (pues al ser L de 2º orden, el conjunto de soluciones es un espacio vectorial de dimensión 2)

· Vamos, por último, a estudiar el único caso que nos queda para anular B.T.: que ρa_0 sea 0 en alguno de los extremos. Es el caso de las <u>condiciones de contorno singulares</u>.

Estos casos hay que <u>analizar individualmente</u> que B.T. se anule. Para eso, el wronskiano no puede estallar; por lo que las funciones del dominio deben ser acotadas en los extremos.

En ese caso, se cumple todo lo del teorema 1, no habiendo degeneración para C.C. separadas.

<u>Ejemplos</u>:

$\boxed{1.}$ $Ly \equiv -y''$; Dom $(L) = \{ y \in C^2[0,\pi] \,/\, y(0) = y(\pi) = 0 \}$

Tengo C.C. homogéneas: $\begin{cases} y(0) = 0 \\ y(\pi) = 0 \end{cases}$

Como $a_1 = 0$; $a_1 = 0 \Longrightarrow$ Se cumple el T. 1. con $\rho = 1$

Vamos a por funciones propias:

→ será real por el T. 1

$$\underline{y \neq 0} \text{ tq. } Ly = \lambda y \quad (\lambda \in \mathbb{C})$$

$\Updownarrow$ → Operador + ecuación + C.C.

$$\underline{y \neq 0} \text{ tq. } \begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = y(\pi) = 0 \end{cases}$$

Tengo una <u>familia de ecuaciones diferenciales</u> con coeficientes ctes. Dependiendo del valor de λ, la solución general varía (<u>0</u>)0 con cte)

$\underset{\sim}{\lambda = 0}$: $\begin{cases} y = \alpha x + \beta \\ y(0) = y(\pi) = 0 \end{cases}$ Impongo C.C. $\begin{cases} \Longrightarrow \beta = 0 \\ \Longrightarrow \alpha\pi = 0;\ \alpha = 0 \end{cases}$ $\Longrightarrow y = 0$; pero precisamente eso <u>lo he prohibido</u>

$\lambda = 0$ <u>no</u> es valor propio

$\lambda \neq 0$:

$$\begin{cases} y = \alpha \,\text{sen} \sqrt{\lambda}\, x + \beta \cos \sqrt{\lambda}\, x \\ y(0) = y(\pi) = 0 \end{cases}$$ solución válida $\forall \lambda \in \mathbb{C}$

Impongo C.C. $\begin{cases} \Rightarrow \beta = 0 \\ \Rightarrow \alpha \,\text{sen} \sqrt{\lambda}\, \pi = 0 \end{cases}$

$\alpha = 0$ (Absurdo pues $y \neq 0$)

$\text{sen} \sqrt{\lambda}\, \pi = 0 \Rightarrow$ Ecuación secular. Todos los valores propios la cumplen, pero puede haber soluciones que no sean valor propio (los λ descartados; en este caso $\lambda = 0$)

$\Updownarrow$

$\sqrt{\lambda}\, \pi = k\pi \; (k \in \mathbb{Z})$

Tanto $\sqrt{\lambda}$ como $-\sqrt{\lambda}$ son solución. Lógico, pues esto es una ecuación en λ, número que tiene dos raíces

$\Updownarrow$

$\boxed{\lambda_n = n^2}$ $(n \in \mathbb{N})$

Me restrinjo a $\mathbb{N}$ porque $(-1)^2 = 1^2$, y así evito contar dos veces la misma solución

Una vez tengo λ_n imponiendo C.C., sacar la solución de mi problema es trivial:

$$y_n = \alpha \,\text{sen}\, n x \quad (n \in \mathbb{N})$$

$\alpha \,\text{sen} \sqrt{n^2}\, x = \alpha \,\text{sen}\, n x$; $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \sqrt{n^2} = n$

Como trabajo con subespacios vectoriales, α es libre

$$\boxed{y_n = \text{sen}\, n x}$$

Se ve que se cumple T.1.:

$$\langle y_m, y_n \rangle = \int_0^{\pi} dx \,\text{sen}(mx)\,\text{sen}(nx) = \delta_{nm} \frac{\pi}{2} \Rightarrow \text{ortogonal}$$

$$\left\{ \text{sen}(nx) \right\}_{n=1}^{\infty} \text{ es una base ortogonal en } L^2 [0, \pi]$$

Veamos qué significa esto:

$$\langle y_n, f(x) \rangle = \int_0^{\pi} dt \,\text{sen}\, nt\, f(t) \; ; \; \langle y_n, y_n \rangle = \frac{\pi}{2}$$

f va aquí para que la conjugada no salga conjugada

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle y_n, f(x) \rangle}{\langle y_n, y_n \rangle} y_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \left[\int_0^{\pi} dt \, \mathrm{sen}\, nt \, f(t) \right] \mathrm{sen}\, nx$$

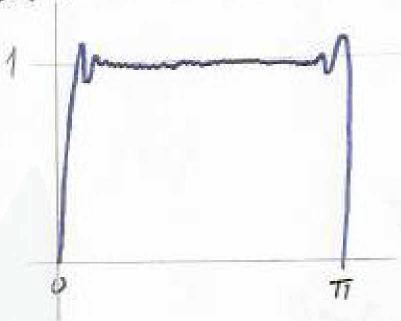
En $L^2[0,\pi]$, esta igualdad no es punto a punto:

$$\langle y_n, 1 \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es par} \\ \frac{2}{n} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

$$1 = \frac{2}{\pi} \sum_{m=1} \frac{2}{2m+1} \mathrm{sen}\left[(2m+1)x\right]$$

En $x=0$, $x=\pi$ la serie es una suma de ceros $\Rightarrow 0 \neq 1$!!

Gráficamente:



Aparecen unas "orejas": fenómeno de Gibbs

Lo que sí es verdad es:

$$\forall g \in L^2[0,\pi] \, ; \quad \int_0^{\pi} f(x) g(x) dx = \int_0^{\pi} g(x) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle y_n, f(x) \rangle}{\langle y_n, y_n \rangle} y_n \right) dx$$

(En física al medir siempre integro)

Véase reflexiones igualdad física

Si $f(x)$ cumple las C.C. y es continua en los extremos, la igualdad sí es punto a punto.

$\boxed{2.}$ $Ly \equiv -y''$; $Dom(L) = \{ y \in C^2[0,l] \;/\; y(0) = y(l);\ y'(0) = y'(l) \}$

Tengo C.C. periódicas:

$$\begin{pmatrix} y(0) \\ y'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(l) \\ y'(l) \end{pmatrix}$$

- $|A| = 1$
- $p = 1$ (pues $a_1 = 0$)
- $1 \cdot (-1) \cdot 1 = 1 \cdot (-1) \Rightarrow$ Cumple el T.2.

Buscamos funciones propias:

$$y \neq 0 \text{ tq } Ly = \lambda y$$
$$\Updownarrow$$
$$y \neq 0 \text{ tq. } \begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = y(l);\ y'(0) = y'(l) \end{cases}$$

De nuevo, hay dos casos:

Me ha quedado un sistema con α y β

- $\lambda = 0$: $y = \alpha x + \beta$; $y' = \alpha$

$$\text{Impongo C.C.} \begin{cases} \beta = \alpha l + \beta;\ \alpha = 0 \\ \alpha = \alpha;\ 0 = 0 \end{cases} \iff \alpha = 0$$

$y = \beta \Rightarrow$ Tengo una familia de funciones propias!

$$\boxed{\begin{matrix} \lambda_0 = 0 \\ y_0 = 1 \end{matrix}}$$ (no degenerado)

· $\lambda \neq 0$: $\quad y = \alpha \operatorname{sen}\sqrt{\lambda}x + \beta\cos\sqrt{\lambda}x$; $y' = \alpha\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}x - \beta\sqrt{\lambda}\operatorname{sen}\sqrt{\lambda}x$

Impongo C.C.:

$$\begin{cases} \beta = \alpha \operatorname{sen}\sqrt{\lambda}\,\ell + \beta\cos\sqrt{\lambda}\,\ell \\ \sqrt{\lambda}\,\alpha = \sqrt{\lambda}\,\alpha\cos\sqrt{\lambda}\,\ell - \beta\sqrt{\lambda}\operatorname{sen}\sqrt{\lambda}\,\ell \end{cases}$$

La pregunta es ¿existe $y \in Dom(L)$ no nulo tal que $y'' + \lambda y = 0$?

$$\Updownarrow$$

¿existen α y β no nulos tales que se cumplan las C.C.?

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\text{¿tiene el sistema solución no trivial para } \alpha \text{ y } \beta\text{?}}$$

Buscando cuando hay solución no trivial obtendremos λ (es lo mismo que hacíamos en dimensión finita al pedir $|A - \lambda Id| = 0$)

Si llamo $s \equiv \operatorname{sen}\sqrt{\lambda}\,\ell$, $c \equiv \cos\sqrt{\lambda}\,\ell$, el sistema se escribe de manera fácil:

$$\begin{pmatrix} s & c-1 \\ \sqrt{\lambda}(1-c) & \sqrt{\lambda}\,s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$s^2 + c^2 = 1$

solución no trivial $\Longleftrightarrow$ $\begin{vmatrix} s & c-1 \\ \sqrt{\lambda}(1-c) & \sqrt{\lambda}\,s \end{vmatrix} = 0 = \sqrt{\lambda}\left[s^2 + (1-c)^2\right] = 2\sqrt{\lambda}\left[1-c\right] = 0$

hay dos posibilidades $\begin{cases} \lambda = 0 \text{ (absurdo pq. eso lo hemos mirado antes)} \\ c = 1 \Leftrightarrow \cos\sqrt{\lambda}\,\ell = 1 \Leftrightarrow \sqrt{\lambda}\,\ell = 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$

$$\lambda_n = \frac{4\pi^2 n^2}{\ell^2} \quad (n \in \mathbb{N})$$

Como $c = 1$; $s = 0$ $\Longrightarrow$ la matriz es idénticamente nula $\Longrightarrow$ α y β son libres $\Rightarrow$ hay degeneración.

De hecho, es evidente que habrá degeneración si y sólo si la matriz es idénticamente nula.

$$\boxed{\begin{aligned} \lambda_n &= \frac{4\pi^2 n^2}{\ell} \\ y_n &= \alpha\cos\frac{2\pi n x}{\ell} + \beta\operatorname{sen}\frac{2\pi n x}{\ell} \end{aligned}}$$

Una base de este subespacio es $\left\{ \text{sen}\left(\frac{2\pi n x}{\ell}\right), \cos\left(\frac{2\pi n x}{\ell}\right) \right\}$

Se puede ver que la base es ortogonal. Si no, se aplicaría Gram-Schmidt.

Así, tengo que: $\left\{ 1, \text{sen}\frac{2\pi n x}{\ell}, \cos\frac{2\pi n x}{\ell} \right\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base ortogonal.

$\boxed{3.}$ $Ly = -y'' - \frac{1}{x}y'$; $\text{Dom}(L) = (0,1)$; $y(1)=0$; $y(0)$?

$$\rho = e^{\int^x \frac{1}{t}dt} = e^{\ln x} = x$$

$$B.T. = \left[-x W[\bar{f},g]\right]_0^1 = xW[\bar{f},g]\Big|_0 - xW[\bar{f},g]\Big|_1$$

El término en 1 se va a anular, pues $W[\bar{f},g] = \underbrace{\bar{f}(1)}_{0 \ (f\in \text{Dom}(L))} g'(1) - \bar{f}'(1)\underbrace{g(1)}_{0 \ (g\in\text{Dom}(L))} = 0$

Así, para que el primer término se anule hay que exigir regularidad en $y(0)$. Esto se traduce en:

$$y\neq 0 \text{ t.q. } \begin{cases} y'' + \frac{1}{x}y' + \lambda y = 0 \\ y(1)=0 \\ y(0) \text{ regular} \end{cases}$$

$t = \sqrt{\lambda}x$; $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\sqrt{\lambda}$

$\frac{d^2y}{dx^2} = \sqrt{\lambda}\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right) = \sqrt{\lambda}\frac{d^2y}{dt^2}\sqrt{\lambda} = \lambda\frac{d^2y}{dt^2}$

$\lambda\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{1}{x}\lambda\frac{dy}{dt} + \lambda y = 0$

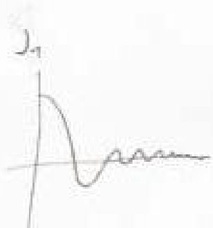
$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{1}{t}\frac{dy}{dt} + y = 0 \Rightarrow$ E. de Bessel

$$\begin{cases} y = \alpha J_0(\sqrt{\lambda}x) + \beta Y_0(\sqrt{\lambda}x) \\ y(1)=0 \\ y(0) \text{ regular. } J_0 \text{ es regular en } 0, \text{ pero en } 0, \text{ por Frobenius, } Y_0 \sim \ln x \ ; \ Y_0' \sim \frac{1}{x} \Rightarrow \text{El } \frac{1}{x}\cdot x \text{ de B.T.} \end{cases}$$

no da cero!!! Hay que pedir $\boxed{\beta = 0}$

Recordemos: $J_n(x) \sim$ " seno amortiguado"

Con la otra c.c. $\Rightarrow$ $\boxed{J_0(\sqrt{\lambda}) = 0 \quad y_n(x) = J_0(\sqrt{\lambda_n}x)}$



Tma. curioso, útil, y que no entra: sea un operador de Sturm-Liouville con valores propios:

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \lambda_4 \ldots$$

entonces, si $y_i(x_1) = y_i(x_2) = 0$; $\exists\, x \in (x_1, x_2)$ tq $y_{i+1}(x) = 0$

ANÁLISIS DE FOURIER

· Partimos del operador:

$$\boxed{Ly=-y'' \quad Dom_L=\{y\in C^2[\tau,\tau+T] \,/\, y(\tau)=y(\tau+T);\ y'(\tau)=y'(\tau+T)\}}$$

Buscamos una base. Para eso, planteo $Ly=\lambda y;\ y\neq 0$:

$$\begin{cases} y''+\lambda y=0\ ;\ y\neq 0 \\ y(\tau)=y(\tau+T) \\ y'(\tau)=y'(\tau+T) \end{cases}$$

Por el tma. 2, como: $\cdot\ a_0=-1$, $\cdot\ a_1=0$, $\cdot\ a_2=0$ $\Rightarrow \rho(x)=1$

Las C.C. son:

$$\begin{pmatrix} y(\tau+T) \\ y'(\tau+T) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(\tau) \\ y(\tau+T) \end{pmatrix}$$

Al cumplir $1\cdot(-1)\cdot 1 = 1\cdot(-1)$, se satisfacen las hipótesis y $Ly=\lambda y$ me arrojará una base propia ortogonal con respecto al prod. esc. canónico

Voy ya a resolver el problema:

· $\lambda=0$: $y''=0 \iff y=\alpha x+\beta$. Impongo C.C.:

$y'=\alpha$

$$\begin{cases} \cancel{\alpha\tau}+\cancel{\beta}=\cancel{\alpha\tau}+\alpha T+\cancel{\beta}\ ;\ \underline{\alpha=0} \\ \alpha=\alpha;\ 0=0 \end{cases}$$

Luego un v.p.: $\lambda_0=0$

$y_0=1$

$\underline{\lambda \neq 0}$: $y = \alpha\,\text{sen}\sqrt{\lambda}x + \beta\cos\sqrt{\lambda}x$; $y' = \alpha\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}x - \beta\sqrt{\lambda}\,\text{sen}\sqrt{\lambda}x$

Impongo C.C.:

$$\begin{cases} \alpha\,\text{sen}\sqrt{\lambda}\tau + \beta\cos\sqrt{\lambda}\tau = \alpha\,\text{sen}\sqrt{\lambda}(\tau+T) + \beta\cos\sqrt{\lambda}(\tau+T) \\ \alpha\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}\tau - \beta\sqrt{\lambda}\,\text{sen}\sqrt{\lambda}\tau = \alpha\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}(\tau+T) - \beta\sqrt{\lambda}\,\text{sen}\sqrt{\lambda}(\tau+T) \end{cases}$$

Si denoto $s \equiv \text{sen}\sqrt{\lambda}\tau$; $s' \equiv \text{sen}\sqrt{\lambda}T$:

$c \equiv \cos\sqrt{\lambda}\tau$; $c' \equiv \cos\sqrt{\lambda}T$

$$\begin{cases} \alpha s + \beta c = \alpha s c' + \alpha c s' + \beta c c' - \beta s s' \\ \alpha\sqrt{\lambda}c - \beta\sqrt{\lambda}s = \alpha\sqrt{\lambda}cc' - \alpha\sqrt{\lambda}ss' - \beta\sqrt{\lambda}sc' - \beta\sqrt{\lambda}cs' \end{cases}$$

Matricialmente: $\begin{pmatrix} s-sc'-cs' & c-cc'+ss' \\ \sqrt{\lambda}[c+ss'-cc'] & \sqrt{\lambda}[-s+sc'+cs'] \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

Únicos α y β no nulos que satisfagan eso, lo que ocurrirá si y sólo si:

$$\sqrt{\lambda}\begin{vmatrix} s-sc'-cs' & c-cc'+ss' \\ c+ss'-cc' & -s+sc'+cs' \end{vmatrix} = 0 \overset{\lambda\neq 0 \text{ por hipótesis}}{\Longleftrightarrow} -(s-sc'-cs')^2-(c-cc'+ss')^2 = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} \text{sen}\sqrt{\lambda}\tau = \text{sen}\sqrt{\lambda}(\tau+T) \\ \cos\sqrt{\lambda}\tau = \cos\sqrt{\lambda}(\tau+T) \end{cases}$$

La matriz es $\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} \Rightarrow$ Habrá degeneración

Si divido ambas ecuaciones: $\text{tg}\sqrt{\lambda}\tau = \text{tg}\sqrt{\lambda}(\tau+T)$. Al ser la tgte. inyectiva a cada subintervalo: esto ocurre si y sólo si:

$$\cancel{\sqrt{\lambda}\tau} = \cancel{\sqrt{\lambda}\tau} + \sqrt{\lambda}\,T + 2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$$

$$\sqrt{\lambda} = -\frac{2k\pi}{T} \quad (k\in\mathbb{Z})$$

pues $(-1)^2 = (1)^2$

$$\lambda_n = \frac{4n^2\pi^2}{T^2} \quad (n\in\mathbb{N})$$

En este caso, <u>hay degeneración</u>. Sin embargo, la base más fácil $\mathcal{B}_{y_n} = \left\{ \operatorname{sen}\frac{2\pi n x}{T}, \cos\frac{2\pi n x}{T} \right\}_{n\in\mathbb{N}}$

resulta ser ortogonal con respecto al producto escalar canónico.

· De todo esto hemos deducido lo verdaderamente importante:

<u>Tma. de Fourier:</u> <u>cualquier función</u> definida en un intervalo $(\tau, \tau+T)$ de cuadrado integrable se puede escribir de la forma:

$$\boxed{f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos\frac{2\pi n x}{T} + b_n \operatorname{sen}\frac{2\pi n x}{T}\right]}$$

con:

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{\tau}^{\tau+T} dt\, f(t)\cos\frac{2\pi n t}{T} \quad = 0 \text{ si } f \text{ es impar}$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{\tau}^{\tau+T} dt\, f(t)\operatorname{sen}\frac{2\pi n t}{T} \quad = 0 \text{ si } f \text{ es par}$$

notas:

· Si f es derivable, la igualdad es punto a punto (en los extremos además hay que pedir periodicidad a f y f')

· En la serie hay desarrollos en el subespacio generado por $\left\{\cos\frac{2\pi n x}{T}, \operatorname{sen}\frac{2\pi n x}{T}\right\}$. Cualquier otra base ortogonal de este subespacio, como $\left\{\cos\frac{2\pi n(x-\tau)}{T}, \operatorname{sen}\frac{2\pi n(x-\tau)}{T}\right\}$ es válida para los desarrollos.

· ¿Qué hago para funciones definidas en todo $\mathbb{R}$? Nótese que todos los sumandos tienen periodo T. Por tanto:

· Si una función está definida en $(\tau, \tau+T)$, su desarrollo en serie de Fourier me extiende f periódicamente, con periodo T, a todo $\mathbb{R}$.

· Si tengo una función de periodo T, su desarrollo en serie de Fourier, elija el τ que elija, me sirve en toda la recta real.

· Si tengo una función definida en un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$, puedo elegir un $[\tau, \tau+T) \subseteq I$, y en el intervalo $(\tau, \tau+T)$, la serie me representará la función. Fuera de ahí, me la extiende periódicamente.

· Hay, por último, dos resultados útiles:

<u>Fma. de Parseval:</u> $\forall f$ de periodo T:

$$\frac{1}{T}\int_{\tau}^{\tau+T} ds\, |f(s)|^2 = \frac{|a_0|^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(|a_n|^2 + |b_n|^2\right)$$

siempre que la integral y la serie existan

Si f es decente, su desarrollo de Fourier se puede derivar e integrar término a término